

Balans over de strategieën en procedures bij het hoofdrekenen halverwege de basisschool

PPON-reeks nummer 40



zeker weten

Samenvatting

Begin 2003 is het vierde peilingsonderzoek voor rekenen-wiskunde medio basisonderwijs uitgevoerd. Naast de toetsen, heeft een steekproef van leerlingen met lage, gemiddelde en hoge rekenvaardigheid een serie opgaven hardop opgelost om oplossingswijzen te verzamelen die zichtbaar maken hoe leerlingen halverwege de basisschool hoofdrekenen. Het jaar daarop heeft een andere, vergelijkbare steekproef leerlingen uit jaargroep 5 dezelfde reeks opgaven opgelost, aangevuld met drie ankeropgaven, om meer informatie te krijgen over de invloed van het vaardigheidsniveau op de manier van hoofdrekenen.

De geregistreerde oplossingswijzen laten zien welk repertoire aan strategieën en procedures leerlingen hebben ontwikkeld, hoe ze rekenprocedures flexibel gebruiken en formaliseren, wat hun prestatieniveau is en welke fouten ze maken bij hardop hoofdrekenen met pen en papier.

De belangrijkste resultaten en conclusies van de uitgevoerde deelstudies zijn hier bij elkaar gezet.

Over de algemene trend

Rijgen: de meest gebruikte en meest effectieve hoofdrekenmethode

Meer hoofdrekenen, minder cijferen. Zo luidt de titel van het openingsartikel van Sjoerd Huitema in het septembernummer van Willem Bartjens anno 1991, kort nadat flexibel hoofdrekenen in het kerndoel basisvaardigheden is opgenomen. Het advies heeft gehoor gekregen. Vijftien jaar na dato rekenen leerlingen uit jaargroep 5 vrijwel altijd met het hoofd, het vaakst rijgend. Het splitsen dat het meest op cijferen lijkt, wordt in hooguit 20% van de oplossingen gebruikt, terwijl het cijferalgoritme in slechts 7 van de 2152 geobserveerde berekeningen is toegepast. In één op de tien oplossingen leidt de leerling af. Alles wijst erop dat rijgen loont en dat splitsen en afleiden onvoldoende worden beheerst, afleiden het minst.

hoofdstuk 3 | pagina 44

Flexibel rekenen op basis van rijgen, splitsen en redeneren vooralsnog niet effectief

Veel leerlingen wisselen van rekenmethode bij het oplossen van de zeven (of negen) optel- en aftrekopgaven van hun opgavenset. Sommigen combineren rijgen met splitsen, anderen wisselen rijgen met splitsen én afleiden of geheugenfeiten af. En er zijn leerlingen die alle vier de rekenmethoden gebruiken. Alles wijst erop dat flexibel hoofdrekenen op basis van rijgen, splitsen en afleiden voorlopig niet loont, omdat te veel leerlingen het splitsen en afleiden onvoldoende beheersen.

hoofdstuk 4 | pagina 51

Meer rijgers in de top van de populatie

Sommige leerlingen uit jaargroep 5 rijgen altijd, welke opgave ze ook oplossen. De vergelijking van het aantal keer dat de leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog rijgen bij het uitrekenen van ankeropgaven geeft een impressie van de samenhang tussen het gebruik van rijgen en het vaardigheidsniveau. Er zijn meer 'rijgers' in de hoogste vaardigheidsgroep gevonden dan in de twee overige groepen.

hoofdstuk 5 | pagina 65

Mengvorm splitsen – rijgen vaak gebruikt bij kaal rekenen

In de schriftelijke toets rekt het gros van de leerlingen uit jaargroep 5 de opgave $35 + 19$ foutloos uit (85% goed) terwijl één op de twee leerlingen $62 - 48$ verkeerd uitrekt. 623 geobserveerde oplossingen van twee optellingen en drie aftrekkingen geven een impressie van hoe deze leerlingen 'kaal' optellen en aftrekken. Vier observaties vallen op. (1) Er wordt veel gesplitst, veel meer dan in het totale bestand oplossingswijzen. (2) Een op de twee leerlingen die $35 + 19$, $306 + 698$ en $62 - 48$ splitsend uitrekt, gebruikt de mengvorm splitsen-rijgen. Het loont alleen bij optellen. (3) Zeer weinig leerlingen die rijgend rekenen vullen aan in plaats van af te trekken. Ze vinden wel allemaal op deze manier de juiste uitkomst. (4) Er wordt opvallend weinig gebruikgemaakt van de elementaire vormen van afleiden die tot het variarekenen behoren.

hoofdstuk 6 | pagina 70

Over rijgend aftrekken

Flexibel rijgen: de elementaire vorm van flexibel hoofdrekenen

1231 geobserveerde rijgoplossingen laten zien dat leerlingen uit de groep Laag, Midden en Hoog een eigen stijl van flexibel aftrekken hebben ontwikkeld, die gebaseerd is op het gebruik van maximaal negen vaste rekenschema's. Deze schema's ontstaan uit de koppeling van drie alternatieve aftrekstrategieën met drie typen rijgprocedures: (1) *aftrekken*, (2) *optellen tot* en (3) *aftrekken tot* in combinatie met (A) *rekenen via een tienvoud*, (B) *rekenen met tienvouden* en (C) *eerst de eenheden bewerken*. Vier aanwijzingen zijn gevonden. (1) Als de leerling een aftrekopgave aftrekkend uitrekent, rijgt hij vrijwel altijd met de 10-sprong of tienvouden (c.q. 100-sprong of honderdvouden). (2) Leerlingen uit de groepen Laag en Midden gebruiken ook vaker deze procedure dan rijgen via een tienvoud, als ze een aftrekopgave overbruggend uitrekenen. (3) Leerlingen uit de groep Hoog gebruiken aan de ene kant een breed scala aan rijgschema's. Ze lossen aan de andere kant opgaven vrij eenzijdig via tienvouden of honderdvouden op, als ze overbruggend aftrekken. (4) Deze leerlingen behalen structureel hoge scores, in tegenstelling tot de leerlingen uit de groep Laag die de rekenhandelingen van meer rijgschema's nog maar matig beheersen.

hoofdstuk 7 | pagina 82

Standaardisering van aftrekprocedures onder de honderd?

Treffende voorbeelden uit de stapel van 1231 geobserveerde oplossingen laten de weg zien die de Nederlandse basisschoolleerling volgt bij de formalisering van aftrekken tot 100. Eerst wordt 'alles tellend' getransformeerd in 'dubbel tellen' en vervolgens in 'rijgen met sprongen in de telrij' (jaargroep 3-4). 'Rijgen met sprongen' wordt daarna eerst in 'rijgen met tienvouden' omgezet en daarna volgens de negen ontwikkelde rijgschema's gestandaardiseerd en aangepast om getallen groter dan 100 te kunnen bewerken (jaargroep 5-6). Het geobserveerde verschil in het niveau van rijgen vraagt om maatwerk. De minst gevorderde leerlingen uit de groep Laag rijgen op het startniveau van jaargroep 4, terwijl de meest gevorderde leerlingen uit de groep Hoog niet onder doen voor de gemiddelde leerling van jaargroep 6.

hoofdstuk 8 | pagina 103

Minder rijgfouten met pen en papier

Een vijftal rijgfouten uit een bestand van ruim 200 oplossingen geeft een behoorlijk inzicht in de aard en de bron van de structurele fouten die leerlingen uit jaargroep 5 bij rijgend aftrekken maken. Leerlingen die nog steeds dubbel tellen moeten deze handeling zo snel mogelijk in rijgen met sprongen zien te veranderen. Leerlingen die met sprongen rijgen, verliezen vaak het overzicht of maken slordigheidsfouten vooral bij aanvullend optellen, omdat ze uit het hoofd rekenen en niets op papier zetten. In de groep meest vaardige leerlingen wordt bij aftrekken tot 1000 dezelfde typen rekenfouten gemaakt als bij aftrekken tot 100 in de groepen Laag en Midden. Auteurs van rekenboeken en leraren moeten de doelen van rijgend hoofdrekenen adequater differentiëren en ervoor zorgen dat deze groepen leerlingen de eerst haalbare sprong naar het eerstvolgende niveau van rijgen kunnen maken. Het leren noteren van de eigen rijghandeling in een functionele schriftelijke rekentaal is daar één van.

hoofdstuk 9 | pagina 131

Over splitsend en redenerend aftrekken

Het tekort aan eenheden spoort aan om splitsen te formaliseren

In één op de tien geobserveerde aftrekoplossingen rekent de leerling de uitkomst van het probleem of de kale aftrekking splitsend uit. Deze uitkomst is in de ene helft van de oplossingen goed en in de andere helft fout. Splitsen levert dan – gemiddeld genomen – 7% van alle correcte uitkomsten op en 16% van alle foutieve uitkomsten. Dit roept meer vragen op dan antwoorden. Deze splitsoplossingen en de gemaakte fouten wijzen hoe dan ook naar twee hoofdproblemen: leerlingen begrijpen de splitsprocedures die ze gebruiken niet goed en maken daarom veel fouten. Ze splitsen bovendien in contexten waar ze beter hadden kunnen rijgen.

hoofdstuk 10 | pagina 148

Afsplitsen en compenseren: het kernprobleem bij redenerend aftrekken

228 oplossingen tonen aan dat leerlingen halverwege de basisschool niet goed kunnen afleiden. Het percentage juiste uitkomsten ligt tussen 40% en 60%, afhankelijk van de strategie die de leerling volgt en de procedure die hij toepast. Bij de meest gebruikte vorm van afleiden – afsplitsen en compenseren – schort het aan twee kanten. Leerlingen vergissen zich bij compenseren. Ze leiden bovendien vaak af in situaties waar ze beter zouden kunnen rijgen (of splitsen). Een lastig probleem dus, als flexibel hoofdrekenen een kerndoel is voor iedereen.

hoofdstuk 11 | pagina 185

Over ‘restoplossingen’ bij aftrekken

De invloed van de taal in aftrekopgaven minder groot dan verondersteld

217 van de 1882 geobserveerde aftrekoplossingen – ruim 11% – is in de categorie ‘rest’ terechtgekomen. De gebruiksfrequentie van deze oplossingswijzen en het aantal gemaakte fouten geven belangrijke informatie over de factoren die bij aftrekken een rol spelen. Het succes (c.q. falen) wordt vooral bepaald door de mate waarin de leerlingen inzichtelijk rijgen, splitsen en geheugenfeiten gebruiken. De kenmerken van de opgaven bepalen voor een belangrijk deel of leerlingen een aftreksituatie correct interpreteren en schematiseren, in de loop van het oplossingsproces vastlopen of (impliciet) om hulp vragen. Het taalgebruik in de opgave is één van die kenmerken. In combinatie met de moeilijkheidsgraad van de opgavenset genereert het taalgebruik vooral in de groepen Laag en Hoog slechts een (zeer) klein deel van het totale aantal fouten dat de leerlingen maken. De taal in de opgaven speelt een rol, maar het verklaart bij lange na niet de structurele en meest voorkomende fouten die leerlingen bij aftrekken maken.

hoofdstuk 12 | pagina 220

Aan de slag!

Balans en verbeterpunten

Leraren en leerlingen realiseren maar gedeeltelijk het doel van flexibel hoofdrekenen. Veel leerlingen kunnen op een inzichtelijke manier flexibel rijgen. Een grote groep geobserveerde leerlingen strandt echter bij het gecombineerde gebruik van rijgen, splitsen en redeneren. Zij begrijpen splitsen en redeneren niet goed genoeg en/of gebruiken deze hoofdrekenmethoden in situaties waar rijgen meer voor de hand ligt. De huidige manier van leren hoofdrekenen werkt bovendien een zeer grote niveaudifferentiatie in de hand die het noodzakelijke maatwerk complex en moeilijk uitvoerbaar maakt. Zo luidt de balans van hoofdrekenen aan het begin van deze 21ste eeuw. Onderzoekers, auteurs van methoden, toetsontwikkelaars én leraren zijn nu aan zet. De geformuleerde verbeterpunten van dit afsluitende hoofdstuk zijn voor hen bedoeld.

hoofdstuk 13 | pagina 223

Meer informatie: <http://ppon.cito.nl>