

Grafische rekenmachine en examens

[Kees Lagerwaard, Ger Limpens, Gerard Stroomer]

Het gebruik van de grafische rekenmachine bij het examen zal ook gevolgen hebben voor de normeringsvoorschriften. Examenmedewerkers van het Cito doen verslag van een workshop hierover gehouden tijdens de regionale bijeenkomsten van de NVvW in het voorjaar.

Inleiding

Bij de regionale studiebijeenkomsten van de NVvW kon men afgelopen voorjaar onder andere intekenen op een workshop die als volgt in Euclides stond aangekondigd:

'Grafische rekenmachines en examens

Examenmedewerkers Cito

In deze workshop zullen we proberen zicht te krijgen op nieuwe werkwijzen met behulp van de grafische rekenmachine en de gevolgen daarvan voor de examens. Wat dienen leerlingen op te schrijven over hoe ze hun GR (grafische rekenmachine) hebben gebruikt? En hoe kent de corrector aan de hand van het correctievoorschrift de juiste (deel)scores toe?

Aan de hand van bijvoorbeeld oude examenopgaven van wiskunde A en B van havo en vwo zal worden besproken wat de mogelijkheden zijn om te komen tot een handzame, nieuwe opzet van correctievoorschriften van examens.

Bedoeling is dat de workshop zowel voor deelnemers als begeleiders leerzaam is.'

Van te voren was ons, Cito-examenmedewerkers, door de organisatoren gevraagd om een dergelijke activiteit te organiseren. Men veronderstelde dat er wel belangstelling voor dit onderwerp zou zijn. Dat bleek inderdaad het geval. In Leiden, Eindhoven en Zwolle was er meer dan voldoende interesse: in Zwolle zelfs zodanig dat het in een laat stadium verstandig bleek de workshop twee keer, bij de middag- én bij de vooravondgroepen, te laten plaatsvinden. Tijdens zowel als na afloop lieten diverse bezoekers weten deze activiteit als zinvol te ervaren. Een en ander heeft er

toe geleid dat we in onderstaand artikel verslag van het geheel doen, in de hoop dat ook degenen die niet in de gelegenheid waren deel te nemen aan de workshops, hun voordeel kunnen doen met de aldaar opgedane ervaringen.

Het programma

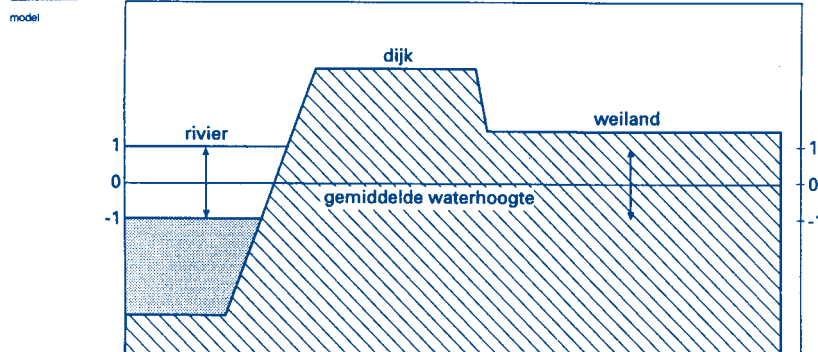
Het programma behelsde de volgende aspecten:

- het verstrekken van achtergrondinformatie
- de probleemstelling 'GR en het Centraal Examen'
- het maken van antwoordmodellen bij (reeds bestaande) examenopgaven.

Tussendoor kwamen uiteraard ook nog andere aspecten aan de orde. In dit artikel zullen deze zaken ook zijdelings passeren.

Het verstrekken van achtergrondinformatie

In november 1999 heeft de CEVO aan alle scholen een pakket brieven (de 'novemberbrieven') gestuurd met de bedoeling allerlei zaken rond de centrale examens, al dan niet in verband met de Tweede Fase, op een rijtje te zetten. Zo was er een brief waarin helder gemaakt werd welke Grafische Rekenmachines er nu precies zijn toegestaan en bij welke vakken de Grafische Rekenmachine al dan niet gebruikt mag worden op het C.E. Met name de passage over het niet toestaan van het gebruik van de GR bij biologie, economie en de bedrijfseconomische vakken riep ook tijdens de workshop diverse heftige reacties op. Er waren verschillende docenten die, hoewel men het er over eens was dat de maatregel formeel geen gevolgen heeft voor het vak wiskunde, aangaven dat ook wiskunde



Veranderingen van de waterhoogte in de rivier hebben gevolgen voor de hoogte van het grondwater in het weiland achter de dijk. Het doorgeven van de schommelingen van de waterdruk in de rivier via het grondwater naar het weiland en het opzuigen en weer afstaan van water door het dijklichaam zelf, spelen daarbij een rol.

Het grondwater volgt de veranderingen met enige vertraging.

Van dit verschijnsel wordt nu een sterk vereenvoudigd wiskundig model gemaakt.

Stel $H_R = \sin \frac{\pi}{6} t$

$$H_W = \sin \frac{\pi}{6} (t - 1)$$

waarbij: H_R = waterhoogte rivier in m
 H_W = hoogte grondwater weiland in m
 t = tijd in maanden

Om de afhankelijkheid van de hoogte van het grondwater en de waterhoogte in de rivier te onderzoeken kun je het volgende doen:

- Leid met behulp van de grafieken van H_R en H_W af in welk tijdsinterval tussen $t = 0$ en $t = 12$ het grondwater stijgt, terwijl het water in de rivier dan juist aan het dalen is;
- Maak een nauwkeurige schatting van de momenten tussen $t = 0$ en $t = 12$ waarop het water in de rivier even hoog staat als het grondwater in het weiland.

60 1 □ Voer dit onderzoek uit. Licht je werkwijze toe.

1

wel een praktisch gevolg hiervan zal ondervinden, daar de maatregel de zaken voor leerlingen zeker niet helderder maakt en het gebruik van de GR jammer genoeg minder universeel wordt dan in eerdere instantie gedacht was. Men uitte dan ook in meerderheid de wens dat de CEVO de betreffende beperking van het GR-gebruik op zo kort mogelijke termijn weer in zal trekken en een enkeling riep het bestuur van de NVvW op de CEVO van deze wens op de hoogte te stellen.

Verder bleek het zinvol het GR-voorbeeld dat vermeld werd in de zogenaamde novemberbrieven die gericht waren aan de vakleraren wiskunde, verder toe te lichten. Bedoeling van de passage rond het merk FANTASY is geweest een voorbeeld te geven van een *leerlingenantwoord* dat, gegeven het antwoordmodel, voldoende gedetailleerd is om met alle deelscores bij de voorbeeldvraag bedeed te worden. Achterliggende gedachte was een leerling ervan te overtuigen bij beantwoording een toelichting op te schrijven op grond waarvan de corrector de gedachtengang/werkwijze van de leerling kan beoordelen.

Ook is er sinds oktober 1999 het Nomenclatuurrapport dat op initiatief van de NVvW tot stand is gekomen. Hoewel het rapport geen officiële status heeft, is het toch van groot belang om, als docent, op de hoogte te

zijn van de diverse begrippen die hierin aan de orde gesteld worden. Voor de GR zijn onder andere de volgende termen relevant: 'Bereken', 'Los op', 'Onderzoek' en 'Tekenen de grafiek'. Het Nomenclatuurrapport, via de website van de NVvW (<http://www.nvww.nl>) op eenvoudige wijze te downloaden, maakt helder waar bij deze termen de GR een rol speelt.

De probleemstelling 'GR en het Centraal Examen'

Aan de hand van de volgende stellingen ontspon zich bij iedere workshop een levendige discussie.

1. Een leerling dient zijn antwoord van een toelichting te voorzien.
2. Als een leerling alleen als toelichting geeft dat hij zijn grafische rekenmachine gebruikt heeft, dan vinden we dat wel dubieus.
3. Een leerling die niet meer dan bovenstaande toelichting geeft en het goede antwoord vindt, heeft ongetwijfeld een correct denkproces doorlopen, tenminste als het een vraag betrof waarbij het antwoord niet voor de hand ligt: een dergelijke leerling verdient dus alle punten.

Lange mensen

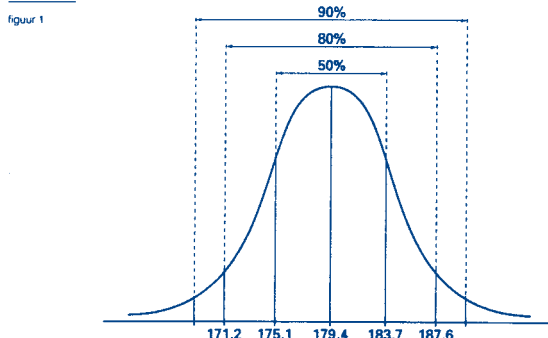
In Nederland worden de mensen steeds langer. Deze ontwikkeling loopt al sinds de Tweede Wereldoorlog. De Nederlandse bevolking behoort tot de langste ter wereld.

Neem aan dat de lengte van vrouwen normaal verdeeld is met gemiddelde 165,1 cm en standaardafwijking 6,5 cm.

Ontwerpers van dameskleding stemmen hun producten vaak af op 90% van de populatie. Ze houden geen rekening met de 5% kleinste en 5% grootste vrouwen.

4p 1 Vanaf welke lengte behoort een vrouw tot de 5% langste vrouwen?

Ook de lengte van mannen blijkt normaal verdeeld, gezien figuur 1.



4p 2 Bereken de standaardafwijking van de lengte van mannen.

2

4. Een leerling die zijn grafische rekenmachine gebruikt, doet er goed aan tussenstappen te vermelden om deelpunten te sprokkelen, dit om te vermijden dat een dergelijk antwoord slechts met 'alles' of 'niets' beoordeeld kan worden.

5. Daar waar de grafische rekenmachine redelijkerwijs ingezet kan worden, dient een antwoordmodel bij een examen zoveel mogelijk te voorzien in de deelpuntenstructuur.

6. Een antwoordmodel kan zich niet baseren op één bestaand type grafische rekenmachine: gebruikers van andere types zouden zich terecht benadeeld voelen.

Met name de derde stelling was kennelijk zodanig dat er behoorlijk uiteenlopende standpunten door de deelnemers naar voren werden gebracht. Er waren docenten die de betreffende stelling absoluut niet onderschreven waar anderen zich, in het licht van het Centraal Examen, diens bedoeling en het belang dat er voor de leerling mee samenhangt, konden vinden in de strekking ervan. Duidelijk was in ieder geval dat iedere deelnemer er van doordrongen was dat een leerling tijdens het C.E. in zijn eigen belang er goed aan doet op toegankelijke en doorgrondbare wijze kond te doen van zijn tussenstapshandelingen en niet te volstaan met het geven van enkel een eindantwoord, ook al is de

vraag niet altijd zodanig dat een redenering expliciet vereist wordt.

In dit kader is het trouwens zinvol te verwijzen naar de vakspecifieke regel 3.6 zoals die sinds jaren in de correctievoorschriften bij de examens wiskunde is opgenomen:

'Indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend, tenzij in het antwoordmodel anders is aangegeven.'

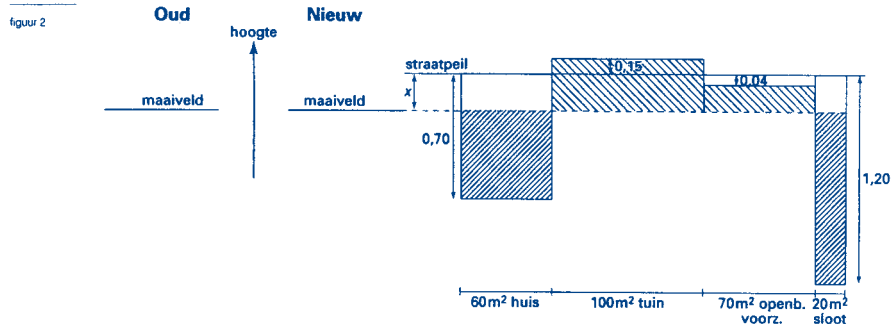
Wiskunde-examens waarbij leerlingen nu reeds van een GR gebruik mogen maken (2^e-fase-examens havo en havo-A-oude stijl bijvoorbeeld) kennen nog een aparte verwijzing naar deze regel 3.6 in de vorm van de volgende toevoeging bij de vakspecifieke regel: *'De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de leerlingen er verslag van hoe zij de GR gebruiken.'*

De serie stellingen werd afgesloten met de volgende vraag:

'Hoe maak je een antwoordmodel waar een gebruiker van een willekeurige toegestane grafische rekenmachine op heldere en eenduidige wijze mee beoordeeld kan worden, indien we er van uitgaan dat

Zuinig met grond

Wanneer op een terrein een nieuwbouwwijk komt, moet er veel grond worden verplaatst. De grond die weggegraven wordt op de plaats waar een huis komt of een sloot, wordt zo mogelijk weer gebruikt voor het ophogen van het terrein op plaatsen waar een tuin komt of waar openbare voorzieningen ontstaan. Het nieuwe straatpeil ligt meestal hoger dan het maaiveld, de hoogte van het oorspronkelijke terrein. In onderstaande figuur zijn de oude en de nieuwe situatie schematisch weergegeven.



In figuur 2 is te zien dat onder het huis de grond is weggegraven tot een diepte van 0,70 m onder straatpeil, dat de tuinhoogte 0,15 m boven straatpeil is, dat de openbare voorzieningen (gemiddeld) 0,04 m onder straatpeil liggen en dat de sloot 1,20 m diep is. Het oude maaiveld ligt lager dan het nieuwe straatpeil.

De weggegraven grond is rechts gearceerd , het ophogen is links gearceerd .

We noemen de hoogte van het nieuwe straatpeil boven het oude maaiveld x .

Bij $x = 0,15$ m zal de hoeveelheid weggegraven grond niet gelijk zijn aan de hoeveelheid grond die nodig is voor het ophogen. Er zal dan dus grond moeten worden aangevoerd of afgevoerd.

- 5p 10 Onderzoek hoeveel m³ grond er dan moet worden aangevoerd of afgevoerd.
- 5p 12 Bereken hoe groot x moet zijn als er sprake is van minimaal grondverzet.

3

de gebruiker zijn tussenstappen aan het papier toevertrouwt?

Deze vraag vormde de instap voor het volgende onderdeel van de workshop.

Het maken van antwoordmodellen bij (reeds bestaande) examenopgaven

Om de deelnemers zelf ook aan de slag te krijgen -het was per slot van rekening een workshop- deelden we na afloop van de discussie over de bovenstaande stellingen een serie opgaven uit. De opgaven waren afkomstig uit de diverse voor de centrale examens wiskunde vervaardigde syllabi. Het betrof de opgaven 'Waterhoogte' en 'Opslagruimte' uit de syllabus Wiskunde B-havo, de opgave 'Doping' uit de syllabus wiskunde B-vwo, de opgaven 'Lange mensen', 'Zuinig met grond', 'Metrolijncapaciteit' (in 2 versies: voor havo-A1,2 respectievelijk vwo-A1,2) uit de syllabus Wiskunde-A. Ook was er een opgave gebaseerd op 'Buffels in Amerika' uit de opdrachtenbundel Discrete Dynamische Modellen van het Freudenthal Instituut. [1] In iedere opgave zat ten minste een vraag waarbij het gebruik van de GR voor de hand liggend dan wel zelfs noodzakelijk was. Iedere deelnemer aan de workshop

werd gevraagd een van deze opgaven te kiezen en de betreffende GR-vraag te voorzien van een antwoordmodel dat paste in de uitgangspunten die even van te voren de revue gepasseerd waren. Het moest, met andere woorden, een antwoordmodel zijn, dat zoveel mogelijk op éénpuntsbasis, machine-onafhankelijk een antwoordstructuur bevatte waarmee leerlingwerk beoordeeld zou kunnen worden.

Bij de opgave 'Waterhoogte' (zie figuur 1) is te constateren dat vragen die meervoudige opdrachten bevatten, ook door docenten niet altijd even nauwkeurig worden beantwoord. Bij de betreffende vraag werden in wezen twee verschillende aspecten aan de orde gesteld. De ingeleverde antwoordopzetten bevatten vaker slechts één van beide aspecten. Verder is te constateren dat er ook hier heel divers over de opzet van een antwoordmodel wordt gedacht. Een enkele docent schrijft een en ander heel precies uit, waar een ander alleen in algemene bewoordingen een mogelijke structuur van een antwoord beschrijft.

Bij de opgave 'Opslagruimte' zien we, als we de na afloop ingeleverde opzetten van een antwoordmodel met elkaar vergelijken, een punt dat ongetwijfeld voor problemen gaat zorgen in de nabije toekomst. Bij deze

opgave is er sprake van een functie met het volgende voorschrift:

$V = 30h + 15\sqrt{16 - 10h + h^2}$ waarvan met behulp van differentiëren de h -waarde moet worden bepaald waarbij V minimaal is. Hoewel de vraagstelling hier heel duidelijk het aspect 'differentiëren' vermeldt, wordt er door meer dan een workshopdeelnemer een antwoordopzet gegeven waarbij er niet op algebraïsche wijze gedifferentieerd wordt, maar *alleen* gebruik gemaakt wordt van de

GR-techniek 'numeriek differentiëren'. Het lijkt ons helder dat een antwoord dat niet de uitgeschreven afgeleide functie

$$\frac{dV}{dh} = 30 + \frac{15(2h - 10)}{2\sqrt{16 - 10h + h^2}}$$
 of een vergelijkbare

uitdrukking bevat nooit in aanmerking kan komen voor alle punten bij een vraag die uitdrukkelijk spreekt over 'met behulp van differentiëren'.

De antwoordopzetten van de opgave 'Lange mensen' (zie figuur 2) waarbij twee vragen over een normale verdeling gesteld worden, zijn leerzaam in zoverre dat we er uit kunnen aflezen dat in ieder geval docenten de minder voor de hand liggende aspecten van de GR ook behoorlijk onder de knie hebben. De vraag om, aan de hand van enkele waarden van de stochast en bijbehorende percentages, de standaardafwijking te bepalen wordt onder andere van een antwoord voorzien waarbij gebruik gemaakt wordt van een onbekende in de normale verdelingsfunctie. Bij deze techniek wordt het klassieke 'terugrekenen' van de standaardnormale Z -waarde naar de onbekende σ door middel van het algebraïsch oplossen van een vergelijking vermeden. Of leerlingen dat ook zullen doen, is uiteraard nog de vraag.

De opgave 'Zuinig met grond' (zie figuur 3) deed ons door de antwoordopzetten nogmaals beseffen dat we zeker niet kunnen volstaan met het geven van slechts een variant als meer varianten min of meer even voor de hand liggend zijn. Zowel een algebraïsche oplossing, een grafische, als een op tabellen gebaseerde oplossing waren hier in de ogen van de verschillende workshopdeelnemers plausibel. Ook vroeg een enkele deelnemer aandacht voor het aspect 'verstandig afronden'. Daar dit bij het vak wiskunde in wezen geen formeel omschreven einddoel of eindterm is, lijkt het ons, bij nader inzien ook, nog steeds niet een aspect dat in een correctievoorschrift moet worden meegenomen, indien er tenminste geen gerichte vraag over is geweest.

In de opgave 'Metrolijn capaciteit', variant vwo-A1,2, werden twee vragen aangewezen als GR-getinte onderdelen. Bij de eerste vraag werd van een gebroken rationale functie, binnen een min of meer realistische context, gevraagd te onderzoeken of deze functie op een zeker indirect in de context gedefinieerd domein monotoon stijgend was. Onderzoek met behulp van de GR geeft dan, zo denken wij, heel wat sneller

helderheid dan een onderzoek met behulp van differentiëren. Uiteraard is het toegestaan bij een dergelijke vraagstelling te kiezen voor de 'klassieker' aanpak maar men dient zich te realiseren dat die benadering dan wel vrij karig beloond wordt als een andere, toegestane aanpak veel sneller resultaat oplevert. De GR is nu eenmaal een krachtig onderzoeksinstrument en leerlingen zullen, daar waar ze er op een of andere wijze toegestaan voordeel van hebben, zich er bewust van moeten zijn dit hulpmiddel ten volle te benutten.

Achteraf

Hoewel de opgaven al (grotendeels) bij ieder van de deelnemers bekend waren, en de syllabi voorzien in het geven van de antwoordmodellen, hebben ook wij in de laatste paar jaar bij het maken van

eindexamenconcepten een ietwat gewijzigde optiek ten aanzien van het gebruik van de GR gekregen. De in de syllabi opgenomen antwoordmodellen waren, met andere woorden, toe aan een actualisering. Deze vernieuwde antwoordmodellen zijn de deelnemers als tegenprestatie ter hand gesteld zonder daarmee de pretentie te willen hebben de enig juiste antwoorden bij de betreffende vragen te kunnen geven.

Al met al kunnen we constateren dat het voor ons, Cito-medewerkers, een leerzame ervaring is geweest. We kunnen niet zorgvuldig genoeg zijn in onze vraagstelling en ook de antwoordmodellen horen onze uiterste aandacht te blijven krijgen. Het was voor ons in ieder geval weer een eye-opener om na afloop geconfronteerd te worden met onvermoede oplossingsmogelijkheden dan wel misvattingen die kennelijk op een of andere wijze door de vragen zelf tot stand werden gebracht.

Tot slot

Deelnemers gaven na afloop te kennen deze manier van werken rond antwoordmodellen en de GR op prijs te stellen. Ook voor ons geldt dat we de bijdragen van de deelnemers tijdens of na afloop van de workshop waarderen. In ieder geval bij deze nogmaals dank aan degenen die een dergelijke bijdrage geleverd hebben. Onder andere op grond van onze ervaringen hier en van de ervaringen rond de recente examens 2000 lijkt het nu reeds aan de orde een artikel aan te kondigen dat hopelijk in het komende najaar zal verschijnen waarin we iets dieper op de GR en de gevolgen daarvan voor het antwoordmodel zullen ingaan.

Noot:

[1] Alle genoemde opgaven en de daarbij behorende GR-uitwerkingen kunnen worden gedownload via:
<http://www.nvww.nl/download.htm>