

OVER ALGEBRA EN MODELLEREN IN DE HAVO-B-EXAMENS

Ter overweging
[Harm Boertien]

Inleiding

Bij de regionale examenbesprekingen eind mei 2005 waren de docenten unaniem van mening dat er in de havo-B-examens meer aandacht voor algebra moet zijn. Het is goed het ontstaan van zo'n wens te begrijpen en te overdenken wat het gevolg van het tegemoetkomen aan die wens kan inhouden. In dit artikel gaan we daarop in. Daarbij gebruiken we de gevonden examenresultaten zoals die in dit nummer van Euclides zijn gepresenteerd (zie pagina 2 e.v.)

Een examen is de boodschapper van wat de leerlingen tijdens hun onderwijs opsteken. Daarover ontstaat altijd discussie. Allerlei vragen komen bovendrijven. Schetsen de examenresultaten een juist beeld? Waarvan? Is de beoordeling die de betrokkenen van de examenresultaten geven juist of gekleurd omdat men een andere boodschap wenst? Op dergelijke vragen moet men al discussiërend een onderbouwd antwoord trachten te vinden.

Hierna is geprobeerd daarmee een begin te maken door min of meer verifieerbare gegevens bij de examenresultaten vast te stellen door algemene ervaringen, feiten, trends en meningen te inventariseren. Over de interpretatie ervan kan men uiteraard altijd twisten. Maar het gaat er natuurlijk wel om, een antwoord te geven waarmee men de data beter kan begrijpen.

Natuurlijk is niet elk argument in dit stuk wetenschappelijk geselecteerd en gecontroleerd. Voordat dat gebeurd is, is Nederland minstens 10 jaar verder en we moeten wel zo mogelijk op kortere termijn weten hoe de examens beter zouden kunnen aansluiten bij de wensen in het onderwijsveld. Kortom, dit stuk is ook voor een belangrijk deel opiniërend van aard. Het achterliggende (minimale) doel ervan is dat er in wiskundeland vaker en systematisch over de plaats van algebra in het onderwijs en in het examen nagedacht zal worden.

Eerst komen ervaringen rond de examenconstructie aan bod. Daarna beschrijven we waargenomen tegenstrijdigheden tussen de wensen en feitelijke examenresultaten. Vervolgens poneren we hypothesen die deze tegenstrijdigheden kunnen verklaren. Tenslotte bediscussiëren we of er een oplossing is voor het besproken probleem.

Examenconstructie

Om goede opgaven voor examens te krijgen worden ze in een aantal scholen getest[1]. Veel onvolkomenheden (en soms fouten) worden daarmee vermeden. De leerlingenresultaten bij het testen van de opgaven geven een globaal beeld van de uitkomsten die we op het examen mogen verwachten. Een nauwkeurige voorspelling van eindexamenresultaten is vooraf niet mogelijk. Na het testen brengen we namelijk soms verbeteringen en wijzigingen in de opgaven aan en het testen vindt niet plaats onder examenomstandigheden. Hierdoor kan een examen soms onverwacht mee- of tegenvallen. De CEVO stelt dan ook de normering vast op basis van de behaalde examenresultaten. De normering is afhankelijk van prestaties die leerlingen leveren. Het is belangrijk dat elk jaar even zware eisen aan de kandidaten worden gesteld om een voldoende te halen voor een examen. Normaal is de N -term gelijk aan 1, maar bij een gemakkelijk examen wordt die kleiner dan 1, bij een moeilijk examen groter dan 1 (zie [2] voor de manier waarop dit gebeurt).

Een examen moet optimaal de inhoud van het examenprogramma bestrijken. Leerlingen moeten bij het oplossen van de opgaven laten zien de vaardigheden (zie eindtermen) te beheersen die men bedoelt te toetsen. Uit de eindtermen is echter niet

Een familie van functies is gegeven door $h(x) = (p-x)(3+x)$, waarbij p elk reëel getal kan voorstellen. De familie bestaat uit een oneindig aantal functies, elk met hun eigen waarde van p . De grafiek van h heeft twee toppen A en B . Aangetoond kan worden dat de x -coördinaten van deze twee toppen (x_A en x_B) als volgt afhangen van de waarde van p :

$$x_A = -2 - \sqrt{\frac{1}{3}p+4} \quad \text{en} \quad x_B = -2 + \sqrt{\frac{1}{3}p+4}$$

- 5p 1 Bereken algebraïsch voor welke waarde van p het verschil $x_B - x_A$ gelijk is aan 8.

Een familie van functies is gegeven door $h(x) = (x+4)(p+4x-x^2)$, waarbij p elk reëel getal kan voorstellen. De grafiek van h heeft twee toppen A en B . Punt A ligt links van de y -as en punt B rechts van de y -as. Aangetoond kan worden dat de x -coördinaten van deze twee toppen (x_A en x_B) als volgt afhangen van de waarde van p :

$$x_A = -\sqrt{\frac{p+16}{3}} \quad \text{en} \quad x_B = \sqrt{\frac{p+16}{3}}$$

- 3p 1 Bereken algebraïsch voor welke waarde van p geldt dat $x_B = 8$.

FIGUUR 1 FIGUUR 2

zonder meer af te leiden welke soorten (bijvoorbeeld eenvoudige, complexe, abstracte) opgaven er in het examen moeten komen. Tijdens de weg van eindterm tot opgave moeten heel wat keuzes gemaakt worden. Daartoe worden er criteria gebruikt. Zo is een belangrijk criterium voor het selecteren van opgaven dat ze goed maakbaar moeten zijn door de leerlingen, niet te moeilijk en niet te gemakkelijk (p' -waarde niet te laag of te hoog). Een psychometrische eis aan de vragen is ook dat ze goed onderscheid maken tussen wiskundig vaardige en minder vaardige leerlingen.

Tegenstrijdige wensen bij een examen

Veel docenten vinden het havo-B-examen van 2005 veel te eenvoudig voor wat hun leerlingen geleerd hebben; zij wensen een qua inhoud rijker (meer algebra en meer complexe vragen) maar daarmee ook moeilijker examens. Hun wensen staan echter op gespannen voet met de scoreresultaten van het examen.

Wensen van docenten

De wensen van docenten gaan dit jaar (en in mindere mate ook vorig jaar) bij het examen over:

- exact versus taal: graag meer algebra in het examen, minder wiskunde-A-achtige vragen;
- de soort vragen: minder '1-staps-vragen' en 'gezond-verstand-vragen', meer 'echte vragen' (meer wiskunde vereisende en complexere vragen);
- voorkomen dat de vereiste precisie en detaillering in uitkomsten en redeneringen problemen opleveren (vooral actueel bij het gebruik van het correctievoorschrift).

Ervaringen bij de examenconstructie en scoreresultaten

Bij het testen van de opgaven voor de examens 2005 van B1 en B12 bleek al dat de leerlingen bepaalde vragen heel moeilijk vonden. Met name de vragen

waar algebraïsch modelleren en algebra aan te pas kwamen, scoorden zo laag dat (ongewijzigde) opname in het examen niet verantwoord was. Deels zijn die vragen weggelaten en deels zijn ze vereenvoudigd. Een voorbeeld van zo'n vraag die vereenvoudigd is, staat in [figuur 1](#).

Deze vraag had een p' -waarde van 27. Hij is daarom veranderd in de vereenvoudigde vraag zoals is opgenomen als [figuur 2](#).

Daarbij kan worden opgemerkt dat de functie h is veranderd vanwege andere aanpassingen elders in de opgave.

De vereenvoudiging van deze vraag betreft het sterk reduceren van het aantal benodigde algebraïsche bewerkingen. In de examenbespreking elders in dit nummer ([zie pagina 2 e.v.](#)) is te zien dat deze poging tot vereenvoudiging goed is gelukt: voor de aangepaste vraag geldt: $p' = 74$. In deze examenbespreking is ook te zien dat over het algemeen de vereenvoudiging van het examen goed gelukt is (volgens sommige docenten te goed).

Uit de examenresultaten blijkt dat de geconstateerde problemen rond algebraïsch getinte vragen niet alleen bij het testen van de opgaven, maar ook in het landelijk examen naar voren komen. De gegeven resultaten leiden tot de vaststelling dat ook vereenvoudigde modelleervragen (met als resultaat een vergelijking of formule) en algebraïsch getinte vragen heel slecht gemaakt worden; zie hiervoor ook de examenvragen van havo-B1 nrs. 8, 11 en 22 ([zie figuur 3](#)) en havo-B12 nrs. 6, 9 ([zie figuur 4](#)) en 21. (*Vraag havo B12-21 komt overeen met die in figuur 2; red.*) [3]

Verder kunnen leerlingen iets ingewikkelder vragen niet zonder instap/opstap/inleiding beantwoorden: vragen waarbij enkele zaken gecombineerd moeten

(Uit: HAVO-B1 2005, Alcohol en rijvaardigheid)
Van de Nederlanders die 15 jaar of ouder zijn, is 48% man en 52% vrouw.
Uit het genoemde onderzoek bleek dat van *alle* Nederlanders van 15 jaar en ouder 80% wel eens alcohol gebruikt.

4p 8 Bereken hoeveel procent van de vrouwen wel eens alcohol gebruikt

(Uit: HAVO-B1 2005, Nederlandse Spoorwegen)
Wordt de controle-intensiteit op een bepaald traject gelijkgesteld aan p (in %), dan is de kans dat een reiziger in de spitsuren van een werkweek (10 ritten) geen enkele maal gecontroleerd wordt gelijk aan $(1 - 0,01p)^{10}$.

3p 11 Toon dit aan.

(Uit: HAVO-B1 2005, Derdegraadsfuncties)
Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 + 27x + 44$.
Een familie functies is gegeven door $h(x) = (x+4)(p+4x-x^2)$, waarbij p elk reëel getal kan voorstellen.

3p 22 Toon aan met behulp van algebra dat er een waarde van p is waarbij de bijbehorende functie h gelijk is aan de functie f .

FIGUUR 3

worden, scoren heel slecht. Ook hebben volgens docenten leerlingen vaak geen idee hoe een wiskundige verantwoording voor een antwoord hoort te zijn. Deze ervaringen op het examen van 2005 komen overeen met de klachten in de afgelopen jaren op hbo-instellingen waar bij de instromende havo-B-leerlingen ook een groot tekort aan beheersing van algebraïsche vaardigheden geconstateerd werd.

Hypotheses

Zoals gezegd claimen veel docenten dat hun leerlingen veel meer aankunnen dan in het examen gevraagd wordt. Deze claim is strijdig met genoemde ervaringen bij examenresultaten. Als men de wensen van de docenten voor het examen (meer algebra) zonder meer zou honoreren, dan zal er volgens de examendata een groot aantal veel te moeilijke vragen in het examen komen, wat zal leiden tot erg lage scores.

Redenen voor het ontstaan van deze tegenstrijdigheid kunnen zijn:

- Bij de invoering van de tweede fase zijn de contacturen voor het vak wiskunde behoorlijk ingeperkt en is de organisatie van het leerproces drastisch veranderd. De nadruk is gelegd op zelfstandig leren/studeren. Wiskunde is voor de meeste leerlingen echter geen zelfstandig aan te leren vak. Daardoor ontstaat er bij kleine aantallen en bij weinig structuur in de manier van studeren te weinig diepgang in de verwerking van de leerstof. De leerlingen kunnen daardoor alleen die vragen maken die ze in vrijwel dezelfde vorm geoefend hebben. Bij moeilijker vragen zullen er dan relatief zeer veel leerlingen afhaken, die bij de eenvoudige vragen wel goed scoren.

- Docenten geven op school doorgaans toetsen die voor een belangrijk deel opgaven bevatten die een zeer goede afspiegeling zijn van het gegeven onderwijs. De opgaven lijken heel veel op

wat (in de boeken en in de les) behandeld is. De leerlingresultaten op de schoolexamens zijn daardoor redelijk goed. Dat leidt ertoe dat docenten de kennis en vaardigheden van hun leerlingen overschatten. Bij opgaven waar de vraagstellingen wat meer afwijken van de 'toevallige leergang' die men op school hanteert, scoren de leerlingen veel lager.

- Examens houden rekening met de eindtermen en zijn bedoeld voor alle scholen. De examenopgaven doen een beroep op de aangeleerde vaardigheden met vragen, die vaak niet zo in de leergang voorkomen en die voor de leerlingen (relatief) nieuwe elementen bevatten. De leerlingen die hun vaardigheden slecht buiten de aangeleerde contexten kunnen demonstreren, scoren daarop veel lager dan verwacht.

- Om toch goede scores op het examen te krijgen worden de examenopgaven na een uitprobeerfase aangepast aan het waargenomen (lage) niveau van de leerlingen. Veel algebraïsche vragen zijn te moeilijk en kunnen niet in het examen opgenomen worden. Meestal zijn de algebraïsche vragen die in het examen worden opgenomen (sterk) vereenvoudigd. Hierdoor wordt er relatief weinig algebra in het examen gevraagd. Docenten vinden dan dat het examen niet voldoende opgaven op niveau bevat.

Gevolgen van het tegemoetkomen aan de wensen

Tegemoetkomen aan de wens om meer algebra en meer '2-stapsvragen' in het examen op te nemen betekent dat de p' -waarde drastisch daalt. Dit valt als volgt in te zien.

Stel dat we het B1-examen van 2005 als uitgangspunt kiezen: 22 vragen en met een lengte van de scoreschaal gelijk aan 82. We nemen verder aan dat het examen uit twee soorten vragen bestaat: uit moeilijke ($p' \leq 35$) en gemakkelijke vragen ($p' > 35$). In het B1-examen vinden we dan 4 moeilijke en 18 gemakkelijke vragen. Voor beide soorten vragen

(Uit: HAVO-B12 2005, Zeegolven)

Diepte (in m)	0	5	15
Diameter (in m)	5,000	1,060	0,048

- 3p 6 Laat door een berekening zien dat de gegevens in bovenstaande tabel ongeveer passen in een exponentieel model.

(Uit: HAVO-B12 2005, Zeegolven)

De gegeven formule $d = H \cdot e^{\frac{-2\pi x}{L}}$ kan voor deze situatie worden omgewerkt tot een formule waarbij H wordt uitgedrukt in L .

- 3p 9 Druk H in L uit.

FIGUUR 4

kiezen we één p' -waarde, het gemiddelde. Voor de moeilijke vragen van het B1-examen vinden we $p' = 25,8$ en voor de gemakkelijke vragen $p' = 66,7$. Samen moeten ze de gemiddelde p' -waarde van 59,3 opleveren. We zullen in het vervolg van de berekening deze waarden hanteren als we spreken van moeilijke en gemakkelijke vragen. De vraag is wat er met het aantal onvoldoendes gebeurt als we gemakkelijke vragen voor moeilijke inwisselen. Berekeningen met N -term = 1 en gelijkblijvende standaarddeviatie van de scoreverdeling leiden er dan toe dat bij het wisselen van slechts twee vragen (zes in plaats van vier moeilijke vragen) een gemakkelijk examen met 25% onvoldoendes verandert in een redelijk moeilijk examen met ongeveer 34% onvoldoendes. Nog één moeilijke vraag erbij en de docenten zullen het examen met 38% onvoldoendes te moeilijk vinden. Kortom: het is niet eenvoudig veel meer algebra in het examen te plaatsen. Zeker niet als men enkele van de overige vragen die nu relatief eenvoudig (1-stapsvragen) genoemd worden, ook nog eens moeilijker maakt.

Discussie

Discussie over deze punten, met voorstellen die kunnen leiden tot een betere samenstelling van examens, is welkom. Hierbij speelt ook mee wat de gewenste vorm van algebra-opgaven is met als centrale vraag: 'Welke algebra?' Terug naar de algebra van de jaren '60 en '70 vindt men doorgaans geen goede optie, algebra met behulp van softwarepakketten behoort nog niet tot de mogelijkheden. Ook zijn er geen andere algebraïsch getinte 'talen' voorhanden waarmee leerlingen zouden kunnen werken (een eenvoudig soort Pascal aangevuld met GR-formules bijvoorbeeld). Men zou zich kunnen voorstellen dat een goede

eigentijdse vorm voor algebra is om inzicht in de algebra-expressies te combineren met andere aanverwante vaardigheden, bijvoorbeeld modelleren en herleiden. De betekenis van de algebraïsche expressies blijft dan bij de vragen op de achtergrond meespelen. Maar in dit geval komen niet alle aspecten van de algebra tot hun recht. Het formeel manipuleren met algebraïsche formules blijft buiten het gezichtsveld. Een voorwaarde voor dit formeel kunnen (om)vormen van algebraïsche expressies is namelijk dat men deze kan doorzien zonder de betekenis van de symbolen afzonderlijk te kennen. Bij het toetsen van algebraïsche vaardigheden in een examen kan men zich richten op verschillende stadia in het kunnen abstraheren van de werkelijkheid. Dit leidt tot verschillende soorten vragen, waarvan de ene soort meer abstractie vooronderstelt dan de andere. Blijft over de vraag of eenvoudige abstracte vragen in een examen wel de vragen zijn die men eigenlijk zou willen stellen.

Noten

[1] Zie voor nadere informatie over de examenconstructie ook het artikel van Ameling Algra en Ger Limpens in het septemnummer van *Euclides* 2004 nr. 1, jaargang 80.

[2] Nadere informatie over de N -term is te vinden op www.citogroep.nl/vo/ce/havovwo/ex2005/eind_fr.htm. Zie 'veelgestelde vragen (FAQ)' > 'Wat is de normeringsmethode?' > 'Uitleg over de methode zelf'.

Een algemeen achtergrondstuk over de N -term is ook te vinden onder <http://toetswijzer.kennisnet.nl/html/normering/home.htm>.

[3] De volledige examens kunnen worden gedownload via www.citogroep.nl.

Over de auteur

Harm Boertien (e-mailadres: harm.boertien@citogroep.nl) is wiskundemedewerker en examenmaker van de Citogroep.