

EXAMENS WISKUNDE 2014

EERSTE TIJDVAK

Ivo Claus
Ger Limpens
Melanie Steentjes
Ruud Stolwijk
Harco Weemink

Nadat het traditionele examenartikel van de Citotoetsdeskundigen vorig jaar een novum in *Euclides* opleverde door slechts digitaal te verschijnen, is er dit jaar voor gekozen om u hun bespiegelingen weer op papier voor te leggen.

Inleiding

[Ger Limpens]

We maken gebruik van de verworvenheden van het digitale tijdperk door te verwijzen naar de verschillende toets- en itemanalyses (TIA's in jargon) die gepubliceerd worden op de site van het Cito.^[1] In die TIA's treft u de tabellen met p'-waarden^[2] die u voorheen bij het examenartikel kon vinden. Als u de moeite neemt om die digitale gegevens op te zoeken, wordt u beloond met niet alleen de overzichten van de relevante p'-waarden maar ook met een grote verzameling andere data: relatieve scorefrequenties per vraag, domeingerelateerde onderverdelingen, overlap met andere 'verwante' wiskunde-examens van 2014-1, profielgerelateerde informatie en scores van jongens respectievelijk meisjes. We vermoeden dat velen van u deze gegevens als erg interessant zullen ervaren.

Al die tabellen kunnen overigens slechts tot stand gebracht worden door de massale deelname van u als docenten. De gegevens die door de correctoren van de eerste correctie in WOLF^[3] worden ingevoerd, liggen aan de basis hiervan. Zoals u zult zien in de voornoemde TIA's worden door veel docenten de gegevens van hun gehele klassen ingevoerd, waardoor geconstateerd kan worden dat we bij onze analyses kunnen terugvallen op de resultaten van een ruime meerderheid van de deelnemende leerlingen. Een woord van dank voor die groot-schalige deelname is hier wel op zijn plaats.

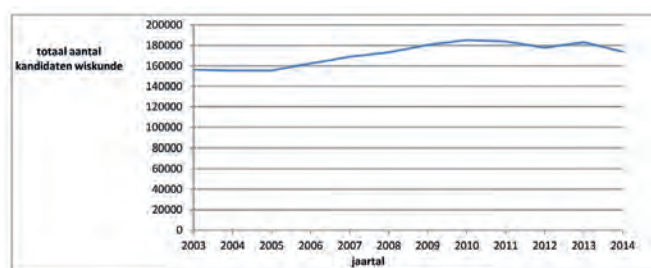
Bij de evaluatie van de examens wordt, behalve van bovenvermelde leerlingenscores, ook gebruikgemaakt van de zogeheten *quick scan*. Docenten die de resultaten van hun leerlingen via WOLF invoeren, krijgen een lijst van vier vragen. De antwoorden op deze vier vragen, die ingaan op de moeilijkheidsgraad, lengte en inhoudelijke aansluiting van het examen geven een goed beeld van de ontvangst van het examen. Dat wijkt nogal eens af van het beeld dat uit het forum van de NVvW waar minder docenten aan deelnemen oprijst. Ook dit laatste medium wordt door ons als examenmakers in de periode rond de examens uiteraard druk bezocht, maar u zult niet verbaasd zijn als we vermelden ons daar niet in de discussies te willen mengen. Wij als examenmakers beschouwen deze soms vrij direct geformuleerde stellingnames van docenten tegenwoordig als

een digitale variant van gesprekken van collega's onder elkaar, die soms een hoog onderwijsleergesprekgehalte kunnen hebben...

opgave	Langste Sleep				Computer spel			Tegelvloer			Verkeers licht			Klisko-ombouw			Van video naar dvd			
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
max. score	2	3	3	4	2	4	4	3	2	3	1	4	4	3	3	4	5	4	3	4
p'-waarde	87	53	62	87	75	41	72	27	46	71	98	57	42	65	60	14	39	39	74	54

tabel 1 Leerlingaantallen 2014

In tabel 1 treft u de diverse hoeveelheden kandidaten van de verschillende wiskunde-examens aan. De overgrote meerderheid van de vmbo BB-kandidaten wordt via een computerexamen op hun wiskundige vaardigheden getoetst. Ook bij vmbo KB is het aantal CBT-getoetste kandidaten veruit in de meerderheid. En de totale hoeveelheid^[4] kandidaten die op de een of andere wijze een wiskunde-examen heeft afgelegd wordt in figuur 1 getoond.



figuur 1 Aantal kandidaten wiskunde in 2003-2014

Als gevolg van de aanpassingen in de slaag/zakregeling is ook dit jaar een aparte vaardigheidsmeting gedaan waarbij eventuele vaardigheidsveranderingen per vak zijn gemeten, vergeleken met eerdere examenjaren 2011, 2012 en 2013. Hier een citaat uit het persbericht van CvE van 12 juli 2014: 'De vmbo-leerlingen van 2014 zijn even vaardig gebleken als de leerlingen van 2013. De vaardigheidsverbetering ten opzichte van 2011 en eerder is geconsolideerd. (...) Bij het havo en het vwo is er ook sprake van een vaardigheidsstijging ten opzichte van 2011 en eerder. Die vaardigheidsstijging betreft alleen de kernvakken (Nederlands, Engels, wiskunde). Voor de niet-kernvakken is die stijging er niet; dit

in tegenstelling tot 2012 en 2013. Voor deze niet-kernvakken van havo en vwo is sprake van een vaardigheidsdaling ten opzichte van 2012 en 2013.'

Voordat we overgaan tot het bespreken van de examens, ook dit jaar een woord van dank voor al diegenen die zich bezighouden met de constructie van de wiskunde-examens. Dat zijn op de eerste plaats de constructiegroepsleden^[5], ervaren docenten die onze *lifeline* naar het veld zijn en op basis van hun uitgebreide ervaring in de examenklassen van de doelgroepen ons de mogelijkheid bieden om passende examens te maken. Ook de leden van de vaststellingscommissies zijn broodnodig om de examenconcepten, ontwikkeld met behulp van die constructiegroepen, bij te sturen en te verfijnen. En verder zijn er vele collega's in het veld die op de een of andere wijze impulsen geven waarmee we de diverse examens steeds een slagje verder kunnen brengen. Denk daarbij aan collega's die examenconcepten van commentaar voorzien, maar ook aan docenten die examenbesprekingen bezoeken. Allen hartelijk dank!

Vmbo KB-GL/TL

[Melanie Steentjes]

Dit jaar was er veel te doen over de computerexamens voor wiskunde kaderberoeps (KB). Hierover verderop in dit artikel meer. We starten met het examen waar de meeste leerlingen aan deelgenomen hebben: het examen voor wiskunde gemengde/theoretische leerweg (GL/TL).

GL/TL – De 1562 docenten die de vragenlijst van de *quick scan* hadden ingevuld, gaven een gemiddeld cijfer van 6,7 aan het GL/TL-examen. Met dat oordeel was men even positief als vorig jaar. Het grootste deel (61%) van de docenten vond de moeilijkheidsgraad van het examen in orde, 17% van de docenten vond het examen moeilijk tegenover 19% van de docenten die aangaf het examen juist makkelijk te vinden. Daarnaast vond 79% van de docenten het examen van precies de goede lengte en 20% vond het examen te lang. De inhoudelijke aansluiting bij het gegeven onderwijs vond men voldoende (48%) tot goed (36%).

De startopgave *Piramides in Egypte* bleek een mooie binnenkomer te zijn, met een gemiddelde p'-waarde (gemiddelde van de drie vragen) van 62,7. Relatief veel commentaar kwam er op de eerste opgave, waarin moest worden berekend hoeveel jaar geleden 2511 voor Christus was. Sommige docenten vonden deze vraag te eenvoudig (hij scoorde ook goed met een p'-waarde van 90), anderen vonden de vraag niet binnen het examenprogramma passen. In de syllabus staat echter dat leerlingen moeten kunnen rekenen met gangbare maten voor tijd en daar valt deze vraag prima onder. Ook op vraag 2 waarbij leerlingen moesten aangeven uit welke positie de foto genomen kon zijn, kwam veel commentaar. Leerlingen bleken zeer inventief in het redeneren



figuur 2 Uit: vmbo GL/TL (Zonnepanelen)

waarom positie *B* de juiste was, en er werd relatief weinig met kijklijnen gewerkt. Voor enkel het omcirkelen van positie *B* kon een punt gegeven worden, maar de redenering moest wel sluitend zijn en veel leerlingen lieten hier een of twee punten liggen.

Ook de context *Olie* was relatief eenvoudig met een gemiddelde p'-waarde van 65,4. Bij vraag 5 moest gewerkt worden met een groeifactor om te berekenen hoeveel olie er in 2050 geproduceerd zou worden. Dit bleek een vraag te zijn waarbij de meeste leerlingen of nul punten scoorden (45%) of alle punten behaalden (40%). Met een p'-waarde van 47 was dit de lastigste vraag van deze context. Het was ook de enige vraag van deze context die geen overlap had met het KB-examen. Bij vraag 6 moest de vergelijking van een rechte lijn opgesteld worden. Uit het forum bleek dat een aantal leerlingen dacht dat het om een exponentiële formule ging. Wellicht had dat te maken met het gebruik van de letter *t* die vaak gebruikt wordt bij exponentiële formules.

De context *Zonnepanelen* leverde de leerlingen weinig problemen op, met uitzondering van vraag 8 waarin twee hoeken opgemeten moesten worden, zie figuur 2. Hier scoorde 51% van de leerlingen geen enkel punt! Een veelgemaakte fout leek het bovenin leggen van de 0 te zijn (zoals je doet bij het opmeten van een koershoek). Vervolgens de eerste context die geen overlap had met het KB-examen, *Serie driehoeken*. Bij vraag 14 moest met inlijsten de oppervlakte van een driehoek bepaald worden. Dit leek bij veel leerlingen ver weggezakt te zijn en zij verzandden in berekeningen met bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras. Bij vraag 15 moest de oppervlakte van een driehoek die zes keer zo groot was als de driehoek in vraag 14 berekend worden. Een zeer eenvoudige vraag als je goed gebruikmaakt van de vergrotingsfactor. Maar veel leerlingen bleken al afgehaakt te zijn na vraag 14: 72% scoorde geen enkel punt.

De context *Zonnehoeke* was met een gemiddelde p'-waarde van 52,2 de lastigste context van het examen. Bij vraag 17 moest met de sinus gewerkt worden. Dit ging bij de meeste leerlingen of helemaal goed (54%

had alle drie de punten) of helemaal fout (33% had geen enkel punt). De vervolgvraag was een stukje lastiger, omdat niet alleen een hoek moest worden berekend met de sinus, maar er vervolgens ook afgelezen moest worden uit de grafiek. Dit bleek een mooi discriminerende vraag te zijn: leerlingen die goed scoorden bij deze vraag scoorden ook goed op het hele examen. Kritiek kwam er op het feit dat als de hoek verkeerd berekend was, het erg moeilijk was om de laatste punten te halen. Dit omdat het zeer lastig was om data die niet rond de 21e van de maand lagen, af te lezen uit de grafiek.

De context *Brug over de Rijn* was een volledige overlap met het KB-examen. Bij de eerste vraag vulden veel leerlingen 500 in de formule in, in plaats van 0. Er werd echter gevraagd naar de hoogte van pyloon 1. Pyloon 2 is even hoog als pyloon 1 vanwege de symmetrie van de dalparabool, maar dat moest dan wel expliciet genoemd worden door de leerling, anders moest er één punt afgetrokken worden.

Het examen sloot af met de context *Waterlinie*. Hier kwam weinig commentaar op en met niet al te lastige vragen leek deze opgave een goede afsluiting van het examen te zijn.

De N-term voor dit examen werd vastgesteld op 0,9. Dat resulteerde in een examen met 25,9% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,4.

KB papier – Helaas is er bij het papieren KB-examen geen *quick scan*. Ook bij de examenbespreking en op het forum was er weinig commentaar op het papieren examen. Dat is wellicht jammer voor ons als examenmakers, maar niet zo merkwaardig, want steeds meer KB-leerlingen doen hun examen op de computer en dus komt er steeds minder feedback op het papieren examen. Het examen begon met de opgave *Robomop*, een zeer eenvoudige startopgave. Bij de eerste vraag moest berekend worden hoeveel de robomop kostte als er 20% korting werd gegeven. Dit bleek totaal geen probleem te zijn voor de meeste leerlingen: 89% behaalde alle punten. Wellicht dat hier het effect van de rekentoets zichtbaar is? Bij vraag 4 moest aan de hand van een plattegrond van een kamer berekend worden hoe lang de robomop erover zou doen om de hele kamer te vegen. Een mooie discriminerende vraag, waarbij 31% van de leerlingen alle punten wist te halen.

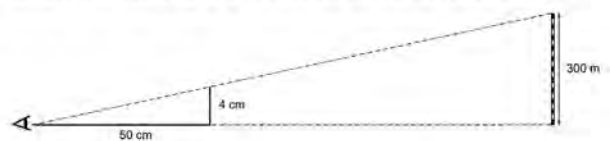
Ook de context *Kaarsen* werd eenvoudig gevonden met een gemiddelde p'-waarde van 75,6. Vraag 6, 7 en 8 gingen over de wortelformule die bij de hoogte van de kaars hoorde. Het invullen in de formule en het tekenen van de grafiek gingen prima (p'-waarden van respectievelijk 88 en 84). Bij vraag 8 moest ingeklemd worden en dat bleek (niet onverwacht) iets lastiger, gezien de p'-waarde van 56.

De opgave *Zendmast* bleek een stuk lastiger te zijn. Bij vraag 9 moest de lengte van een kabel berekend worden

2b 12 De zendmast is in de wijde omgeving te zien. Agaat wil de afstand tot de zendmast weten. Ze strekt haar arm uit en geeft met haar vingers de grootte van de zendmast aan.



De afstand van haar oog tot haar vingers is 50 cm. De grootte die ze aangeeft met haar vingers is 4 cm. Je ziet een schets van de situatie.



→ Bereken de afstand van Agaat tot de zendmast in hele meters. Schrijf je berekening op.

figuur 3 Uit: vmbo KB (Zendmast)

met behulp van de stelling van Pythagoras. Een mooie discriminerende vraag, waar toch 36% van de leerlingen geen enkel punt wist te halen. Bij vraag 10 moest met behulp van de tangens een hoek berekend worden. Opvallend is dat deze vraag ongeveer gelijk scoorde aan de vorige vraag, terwijl goniometrie vaak toch iets lastiger gevonden wordt. Bij vraag 12, zie figuur 3, moesten leerlingen met behulp van gelijkvormigheid de afstand van een persoon tot de zendmast berekenen. Maar liefst 62% van de leerlingen haalde hier geen enkel punt.

VMBO	HAVO	VWO
Wiskunde CSE BB digitaal	Wiskunde A	Wiskunde A
16513	35486	18053
Wiskunde CSE BB papier	Wiskunde A pilot	Wiskunde A pilot
140	213	247
Wiskunde CSE KB digitaal	Wiskunde B	Wiskunde B
19831	12372	16131
Wiskunde CSE KB papier	Wiskunde B pilot	Wiskunde B pilot
3818	128	174
Wiskunde CSE GL/TL		Wiskunde C
48707		1891
		Wiskunde C pilot
		44
totaal	totaal	totaal
89009	48189	38540
		totaal generaal
		173748

tabel 2 Vmbo overlap KB – GL/TL 2014

Met uitzondering van de eerste vraag was de context *Brug over de Rijn* overlappend met het GL/TL-examen. Voor de gegevens rond de overlap, zie tabel 2. Bij de eerste vraag moest met behulp van symmetrie de lengte van het brugdeel links van pyloon 1 berekend worden. Dit was op voorhand ingeschat als een eenvoudige vraag, en om die reden weggelaten uit het GL/TL-examen. De KB-leerlingen bleken er inderdaad weinig moeite mee te hebben: 82% van de leerlingen scoorde alle punten. Vraag 14 was wel overlappend met het GL/TL-examen en ook de KB-leerlingen hadden veel moeite met deze vraag waar de hoogte van pyloon 1 berekend moest worden. Zij scoorden nog veel lager dan de GL/TL-leerlingen: de vraag had een p'-waarde

van 40. Een reden hiervoor zou kunnen zijn dat vraag 13 de leerlingen de verkeerde kant op gestuurd heeft. Misschien dat ze de waarde van het antwoord bij vraag 13 in de formule hebben ingevuld. Vraag 15 bleek ook lastig te zijn. Slechts 8% van de leerlingen wist hier alle punten binnen te halen.

Zonnepanelen overlapte voor een groot deel met het GL/TL-examen. Het opmeten van de hoeken ging bij KB nog slechter dan bij GL/TL: een p'-waarde van 20 en 75% van de leerlingen haalde geen enkel punt. Vraag 17 had geen overlap met het GL/TL-examen, maar leek wel veel op vraag 9 bij het GL/TL-examen. Ook bij het KB-examen moest de hellingshoek van het dak berekend worden, alleen was er bij KB in de gelijkbenige driehoek een hoogtelijn getekend. Dit kleine verschil zorgde ervoor dat de KB-leerlingen er goed mee overweg konden. De vraag werd bij KB maar een klein beetje slechter gemaakt dan bij GL/TL: respectievelijk een p'-waarde van 69 en 74. De context *Olie* was in zijn geheel overlappend met het GL/TL-examen. Een lastige context met een gemiddelde p'-waarde van 45,7. Het examen sloot af met *Piramides in Egypte*. De eerste twee vragen waren overlappend met het GL/TL-examen en gingen redelijk goed. Bij vraag 25 moest berekend worden op welke schaal de plattegrond op de uitwerkbijlage getekend was. De examenmakers hadden niet bedacht dat dit lastig zou zijn, maar opvallend was de lage p'-waarde van 23. De schaal moest berekend worden aan de hand van de afmetingen van de piramide van Chefren. Naast de breedte van de piramide was ook de hoogte gegeven (die was nodig voor het beantwoorden van vraag 26). Wellicht dat dit voor verwarring heeft gezorgd en dientengevolge voor de lage score. De N-term voor dit examen werd vastgesteld op 0,9. Dat resulteerde in een examen met 33,5% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,0.

Computerexamen – Nogmaals, er was dit jaar veel te doen over het computerexamen bij wiskunde KB. In het computerexamen wordt gebruikgemaakt van de *toolbox* waarin onder andere een rekenmachine zit. In het Cito-examenartikel van 2012^[6] is de functionaliteit van de *toolbox* uitgebreid beschreven. Er is geprobeerd de rekenmachine uit de *toolbox* zoveel mogelijk overeen te laten komen met de rekenmachines die de leerlingen gewend zijn. Verschillen zijn echter onontkoombaar, omdat de gebruikte rekenmachines onderling verschillen en we geen keuze willen maken voor een bepaalde rekenmachine. Een vervelend geval dat van tevoren niet werd voorzien door de examenmakers, zijn de verschillende minknoppen. Op de rekenmachine in de *toolbox* staan, net als op de meeste rekenmachines, een bewerkingsknop voor aftrekken en een (-) knop voor het invoeren van negatieve getallen, zie figuur 4. Het probleem doet zich voor bij berekeningen die beginnen met een negatief getal. Bij de rekenmachine in



figuur 4 Screenshot rekenmachine toolbox

de *toolbox* wordt bij de bewerkingsknop voor aftrekken het resultaat van een voorgaande berekening (ANS) neergezet: er verschijnt 'ANS - ' in het scherm. Dit komt overeen met de werking van rekenmachines van bijvoorbeeld Casio en Texas Instruments. Wanneer je bij Casio echter tussendoor op bijvoorbeeld 'C' of 'AC' drukt, wordt het geheugen gewist en kan er vervolgens wel een negatief getal ingevuld worden met deze knop. Bij de rekenmachine in de *toolbox* en bij rekenmachines van Texas Instruments kan het geheugen echter niet gewist worden. Deze rekenmachines dwingen af dat bij een dergelijke berekening gebruikgemaakt moet worden van de (-) knop voor het invoeren van negatieve getallen. Sommige leerlingen kwamen tijdens de afname erachter dat de rekenmachine in de *toolbox* een andere berekening uitvoerde dan zij wilden. Ook is gemeld dat er leerlingen zijn die niet gemerkt hebben dat de rekenmachine een andere berekening uitvoerde. Daardoor hebben deze leerlingen tijdens het examen verkeerde antwoorden gegeven. Om deze reden is besloten om de leerlingen die hiervan hinder ondervonden, de mogelijkheid te bieden om het gemaakte computerexamen ongeldig te laten verklaren en het examen opnieuw te maken met behoud van het recht op herkansing. Er is besloten om de rekenmachine niet aan te passen. Wel zal er volgend jaar meer voorbeeldmateriaal beschikbaar zijn, zodat leerlingen hiermee kunnen oefenen. Uiteraard mogen leerlingen ook altijd hun eigen rekenmachine bij het examen gebruiken. Een heel ander probleem was dat de lengtes van de scoreschalen niet voor alle varianten gelijk waren. Dit bleek voor de meeste scholen gelukkig niet problematisch te zijn.

Dit jaar wordt één variant als voorbeeldexamen openbaar gemaakt. In totaal hebben we de gegevens ontvangen van 10.925 leerlingen. Deze leerlingen hebben verschillende varianten gemaakt, dus de opgaven van de variant die hier besproken wordt, zijn slechts door een beperkt deel van deze leerlingen gemaakt. De p'-waarden zijn te vinden in tabel 3. De variant begon met de context *Langste sleep*. Zowel rekenen met tijd als met procenten kwam aan bod. Leerlingen bleken hier weinig moeite mee te hebben, getuige de gemiddelde p'-waarde van 72,3.

opgave	Piramides in Egypte		Olie			Zonnepanelen			Brug over de Rijn	
	2	3	3	3	3	2	4	2	2	4
max. score	2	3	3	3	3	2	4	2	2	4
vraagnr. gtl	1	2	4	6	7	8	10	11	19	20
p'-waarde gtl	90	62	79	63	72	43	81	78	74	49
vraagnr. kb	23	24	20	21	22	16	18	19	14	15
p'-waarde kb	77	46	55	37	45	20	66	61	40	25
verschil in p'-waarden	13	16	24	26	27	23	15	17	34	24

tabel 3 Vmbo KB cbt 2014

Bij de opgave *Computerspel* speelde het probleem met de rekenmachine. Aan de scores is op het eerste gezicht niet te zien dat veel leerlingen hinder hadden van een afwijkende rekenmachine. Bij de laatste vraag van deze context moest een tabel ingevuld worden en een grafiek getekend worden. Van de leerlingen scoorde 44% alle punten. Maar liefst 32% liet hier een punt liggen. Opvallend was dat bij alle vragen in de varianten waarbij een grafiek getekend moest worden, veel leerlingen het laatste punt niet haalden. Welk punt dat is, valt natuurlijk niet te achterhalen, maar bij observaties in de klas bleek dat veel leerlingen moeite hadden met het tekenen van een kromme. Hiervoor moesten zij gebruikmaken van een functionaliteit uit de diagramtool, maar het leek erop dat veel leerlingen hier niet of nauwelijks bekend mee waren. We gaan kijken hoe we dat volgend jaar beter onder de aandacht kunnen brengen.

Bij de context *Tegelvloer* moest gerekend worden met hoeken en draaisymmetrie. Dit vonden leerlingen erg lastig. Bij de laatste vraag moesten leerlingen een patroon zo kleuren dat er maar twee symmetrieassen waren. Dit concrete werk bleek de leerlingen het beste af te gaan: de p'-waarde van deze vraag was 71.

figuur 5 Uit: vmbo KB (Verkeerslicht)

Verkeerslicht

Je ziet een diagram getekend waaruit je kunt aflezen wanneer het licht van het verkeerslicht een bepaalde kleur heeft.

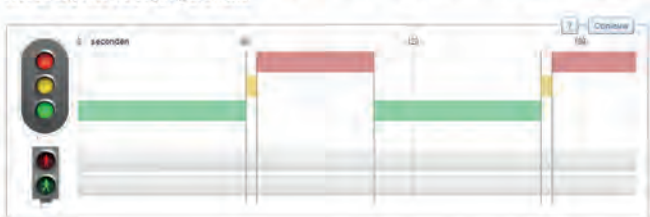
Bij het verkeerslicht is ook een voetgangerslicht.

Een voetgangerslicht springt alleen op rood en groen.

Het voetgangerslicht is op de volgende manier afgesteld:

- Vier seconden **nadat** het verkeerslicht op rood springt, springt het voetgangerslicht op groen.
- Tien seconden **voordat** het verkeerslicht op groen springt, springt het voetgangerslicht weer op rood.

(4p) Zet in het diagram voor dezelfde periode van 200 seconden de kleuren die horen bij het voetgangerslicht.



Bij de laatste vraag van *Verkeerslicht* moesten de kleuren van het voetgangerslicht aangegeven worden in een diagram, zie figuur 5. Een mooi voorbeeld van een vraag die in een papieren examen lastiger te stellen was geweest aangezien het kleuren veel tijd in beslag zou hebben genomen.

Bij *Kliko-ombouw* kwam meetkunde uitgebreid aan bod. De derde vraag bleek erg lastig te zijn. Hier moesten leerlingen beredeneren of een houten plaat van bepaalde afmetingen voldoende groot was om de ombouw te maken. Veel leerlingen gingen hier de mist in: 69% behaalde geen enkel punt en het was met een p'-waarde van 14 de lastigste vraag van deze variant. Het examen sloot af met de context *Van video naar dvd*. Bij de eerste vraag moest een formule gegeven worden die hoorde bij een lineair verband. Deze vraag scoorde met een p'-waarde van 39 ongeveer gelijk aan een vergelijkbare vraag in het papieren examen (vraag 21 met een p'-waarde van 37).

Havo A

[Ivo Claus]

Het examen havo wiskunde A bestond dit jaar uit 22 vragen, verdeeld over vijf opgaven. De leerlingen behaalden gemiddeld 49 van de 80 punten. Het examen werd genormeerd met een N-term van 1,1, hetgeen resulteerde in 18,7% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,6. Een mooi resultaat!

Het examen kreeg in de *quick scan* van 1140 docenten gemiddeld een voldoende (6,2). Men vond het geen makkelijk examen, maar de behaalde resultaten van de leerlingen vielen alleszins mee. Verder vond men het examen gemiddeld aan de lange kant. De analyses wezen echter niet in die richting. Er is een aanvulling op het correctievoorschrift verschenen behorende bij de vragen 3, 4 en 13. In elk van de gevallen betrof het afrondingskwesities. Nauwkeurigheid/afronding blijft een punt van aandacht in de correctievoorschriften.

In de examenbespreking merkten docenten op dat dit examen 'anders' was dan examens van de afgelopen jaren. Vanuit het oogpunt van examentraining is het begrijpelijk dat docenten en leerlingen de behoefte hebben aan op elkaar lijkende examens. Men zal begrijpen dat dit vanuit het standpunt van CvE en de examenmakers geen doel is, en zelfs onwenselijk. Natuurlijk is enige herkenbaarheid goed, maar ieder jaar benutten we opnieuw de mogelijkheid om uit de gehele breedte van het examenprogramma onderwerpen te kiezen. Dit laat onverlet dat het streven is om leerlingen over de jaren heen, via de N-term, voor gelijke prestaties gelijk te belonen. Men merkte verder op dat veel vragen ófwel moeilijk waren ófwel gemakkelijk, met maar weinig variatie in moeilijkheidsgraad daartussenin. Getuige de variatie in de p'-waarden lijkt dit toch niet het geval.

In de eerste opgave, *Krachtvoer voor melkkoeien*, werd de winst op koemelk als functie van de hoeveelheid krachtvoer beschouwd. Vraag 1 over het toenamen-diagram (misschien een ondergeschoven kindje in de lespraktijk) vond men niet zo geschikt als beginvraag, maar $p' = 74$ wijst erop dat het als beginvraag zijn functie van binnenkomertje vervulde. Een ander – niet nieuw – punt van kritiek was de (grote) hoeveelheid tekst. Het is goed om hierop te blijven letten. De eerste vraag (hoeveel krachtvoer geeft de maximale melkproductie?) gaf veel discussie op het forum, met name over de nauwkeurigheid van het eindantwoord. Zo valt het antwoord 13 ook te verdedigen, als je uitgaat van het discreet zijn van de variabele V . Aan het eind van de discussie lazen we de uitspraak ‘Het probleem is dat wij (docenten) wiskundig denken, terwijl leerlingen contextgericht denken’. Mooier is het niet te zeggen.

De aanvulling op het correctievoorschrift van vraag 3 betrof de nauwkeurigheid van het eindantwoord: de gevraagde waarde W is een bedrag (dus te noteren in twee decimalen), maar omdat dit de winst per koe is, is het in zekere zin een gemiddelde, hetgeen een antwoord met meer decimalen rechtvaardigt.

Vraag 4 had, zoals verwacht, een lage p' -waarde (40): algebra blijft een lastig onderwerp voor de leerlingen. Bovendien werd op het forum opgemerkt dat de vermenigvuldigingspunten bij sommige leerlingen verwarring geven. Toch moeten leerlingen hiermee om kunnen gaan. Bij de opgave *FF snel sms'en* werden goede resultaten behaald: de p' -waarden varieerden van 57 tot 78.

Op het forum werden bij vraag 11 van opgave *Bloedpaspoort* de gevolgen van het – al dan niet – tussentijds afronden uitgebreid besproken. De mate van tussentijds afronden gaf een grote variatie in de antwoorden. Dat vonden sommige docenten onwenselijk. Echter, juist de aanpak van de leerling bepaalt bij deze vraag hoeveel punten hij/zij krijgt: het antwoord, mits correct verkregen, is hier van ondergeschikt belang. Bij vraag 13 berekenden sommige leerlingen eerst de bovengrens en vervolgens – conform de gegevens in het examen – ronden zij die af op één decimaal (2,9); daarna wordt dan de symmetrie van de normale verdeling gebruikt, waaruit als ondergrens 0 volgt. Een bovengrens van 2,9 is zeker acceptabel, maar 0 als ondergrens moet een leerling doen inzien dat het afronden minder grof moet gebeuren. Het correctievoorschrift van vraag 13 verdiende daarom een aanvulling. In *Van score naar cijfer* werd de berekeningswijze van het examencijfer onder de loep genomen. Bij vraag 14 behaalde 81% van de leerlingen twee van de vier punten, waarschijnlijk betrof het dan de situatie die in de opmerking in het correctievoorschrift beschreven stond; veel leerlingen werkten met getallenvoorbeelden, maar de zinsnede ‘voor elke waarde van L ’ vraagt om meer dan dat. Op het forum werd ook een fraaie formulering van een leerling, passende bij het vak wiskunde A,

genoemd: ‘de helft [van de punten] gedeeld door alle punten is altijd 0,5’. Dat lijkt ons een prima verwoording van het algebraïsche analogon uit het correctievoorschrift.

Bij de correctie van vraag 16 kwam nog eens voor het voetlicht wat het begrip ‘herleiding’ betekent. Sommige docenten vroegen zich af hoe een aanpak te scoren waarbij eerst de coördinaten van twee punten worden berekend en vervolgens de bijbehorende formule (in de gevraagde vorm) wordt opgesteld. De examenbespreking was hier duidelijk in: nul punten.

Bij vraag 17 moest uit de grafiek op de uitwerkbijlage de waarde 49 worden afgelezen. De opmerking in het correctievoorschrift gaf aan dat een afleesfout ‘aan de bovenkant’ van 50 acceptabel was. Op het forum vroegen men zich af waarom 48 dan niet. Het juiste antwoord kwam even later van een andere docent: iets meer dan 49 (bijvoorbeeld 49,4) aflezen betekent dat een score van 50 behaald moet worden. Iets minder dan 49 (bijvoorbeeld 48,4) aflezen betekent dat een score van 49 behaald moet worden.

De opgave *Wat zeg je?* had van alles wat in zich. Combinatoriek, kansrekening, het opstellen van een lineaire formule en een vraag waarbij aflezen, rekenen en *common sense* tot een goed antwoord leiden. Vraag 20 leverde op het forum een interessante kwestie op ten aanzien van de toevoeging ‘(of nauwkeuriger)’ achter een antwoord in een correctievoorschrift. Hiermee wordt bedoeld dat het ‘exacte’ antwoord ook – op correcte wijze – op méér decimalen mag worden afgerond dan het antwoord dat in het correctievoorschrift staat vermeld.

Havo A pilot

[Ivo Claus]

Het pilotexamen havo wiskunde A bestond uit 22 vragen, verdeeld over zes opgaven. De via WOLF verkregen gegevens van 198 kandidaten wezen uit dat de kandidaten gemiddeld 49 van de 84 punten behaalden. De opgave *Honkbal* was pilotspecifiek, evenals de onderzoekopgave *Wind delen met wind-delen* en vraag 19 in *Wat zeg je?* De verschillen in de p' -waarden van de overlapvragen tussen de beide populaties waren beperkt. De pilotleerlingen scoorden meestal net iets hoger dan de reguliere kandidaten. Zie daarvoor tabel 4 met overlapgegevens. De algebraïsche vragen 4, 11 en (deels) 9

tabel 4 Havo overlap A – A pilot 2014

opgave	Krachtvoer voor melkkoeien				FF snel sms'en				Van score naar cijfer					Wat zeg je?		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	18	20	21
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	18	20	21
max. score	3	3	3	3	4	3	3	4	4	4	4	3	4	3	5	5
p' -waarde pilot	81	72	92	42	61	70	79	62	55	77	31	52	38	79	50	44
regulier	74	61	90	40	69	70	78	57	51	76	29	48	38	75	64	46

maakten ze net iets beter, maar het verschil is marginaal. Twee vragen waarbij het verschil wél duidelijk was, waren vraag 2 en vraag 20, waarbij de eerste in het voordeel van de pilotleerlingen uitviel en de tweede juist niet. Het blijft gissen naar de oorzaken van deze verschillen tussen beide populaties. Zowel tijdens de pilotexamenbespreking als in de *quick scan* lieten de pilotdocenten hun waardering blijken: men vond het een mooi examen dat een goede mix kende tussen formele wiskunde (zoals de herleidingen) en vragen waarbij je met gezond verstand een heel eind kunt komen. Over de aansluiting op het onderwijs was men ook heel positief.

Er lijkt een verband te zijn tussen het percentage gewonnen wedstrijden en het totaal aantal scorepunten en tegenpunten van een team. Over een heel seizoen geldt voor een team bij benadering de volgende formule:

$$P = \frac{100 \cdot S^2}{S^2 + T^2}$$

Hierin is P het percentage gewonnen wedstrijden in het seizoen, S het totaal aantal scorepunten en T het totaal aantal tegenpunten in het seizoen.

Voor teams die in een seizoen twee keer zoveel tegenpunten als scorepunten krijgen, geldt $T = 2 \cdot S$. Als je dit invult in de formule van P , ontstaat een nieuwe formule van P . Door die formule te herleiden, kun je laten zien dat er in deze situatie voor P altijd hetzelfde getal uitkomt.

15 Geef deze herleiding.

figuur 6 Uit: havo A pilot (Honkbal)

In de pilotopgave *Honkbal* werd het verband beschouwd tussen het percentage gewonnen wedstrijden van honkbalteams enerzijds en hun totaal aantal scorepunten en tegenpunten in een seizoen anderzijds. Het binnenkomertje, vraag 14, scoorde hoog. Bij vraag 15 werd op algebraïsch vlak veel van de leerlingen gevraagd, zie figuur 6. De behaalde $p' = 11$ geeft aan dat hier nog steeds werk aan de winkel is voor docenten en leerlingen. De pilotdocenten vonden dat, ook al is dit een stevige algebraïsche vraag, zoiets moet kunnen binnen het pilotexamenprogramma. Nota bene: 64% van de leerlingen scoorde hier nul van de vier punten: er zullen waarschijnlijk heel wat leerlingen de $2S$ niet tussen haakjes hebben gezet in de formule voor P : immers, zouden ze dat wel doen, dan leverde dat al één punt op.

Vraag 16, waarbij kwalitatief aan de hand van een formule moest worden geredeneerd, deed het goed: naast 43% van de leerlingen die nul punten behaalden, verdiende 37% van de leerlingen hier de maximumscore van drie punten. Vraag 17 kende een erratum (misschien ware het beter dit een 'precisering' te noemen?).

Leerlingen werden hierbij gewezen op de noodzaak om een gegeven formule te hanteren. Volgens een aantal docenten was dit eigenlijk niet nodig geweest. De leerlingen konden met deze vraag goed uit de voeten: $p' = 76$. Vraag 19 in de opgave *Wat zeg je?* behoorde niet tot de overlap met regulier, in tegenstelling tot de

rest van de opgave. Bij deze telvraag werd veelvuldig alleen het aantal resultatenlijstjes berekend met precies acht goede antwoorden in plaats van minstens acht. Dit leverde helaas maar één punt op en die score werd door 30% van de leerlingen behaald.

De onderzoekopgave was er een volgens het boekje. De vraag is of het, in de gegeven situatie, verstandig is om enkele winddelen te kopen. Een winddeel is een participatie in een gemeenschappelijke windmolen. Je betaalt aanschaf en onderhoud, maar hoeft dan (behalve belasting) geen stroomkosten meer te betalen. Leerlingen konden goed met deze onderzoekopgave aan de slag, want je kunt eenvoudig punten verdienen door een en ander uit te rekenen. De relatieve score-opbouw (lopend van score 0 tot en met de maximumscore 8) was: 2-1-4-10-14-22-26-11-11. Toch is het geen pure rekenopgave. Want, zo leert de opgave, wanneer je géén winddelen koopt, heb je geen aanschafkosten: dat bedrag kun je op een spaarrekening zetten. Dus: samengestelde rente, dus een exponentieel verband, dus wiskunde. De opmerking in het correctievoorschrift betreft een fout die van tevoren was voorzien: bij het berekenen van de rentewinst moet nog wel het ingelegde bedrag van het eindbedrag worden afgetrokken. 26% van de leerlingen had zes van de acht punten; vermoedelijk betrof het bij hen de genoemde fout.

Op basis van de psychometrische analyses blijkt al met al dat het pilotexamen een klein beetje moeilijker was dan het reguliere examen en dat de pilotkandidaten iets vaardiger waren dan de reguliere kandidaten. De N-term van dit examen is, daaruit voortvloeiend, vastgesteld op 1,4 hetgeen resulteerde in 12,1% onvoldoendes en een gemiddelde cijfer van 6,7.

Havo B

[Ruud Stolwijk]

Het havo wiskunde B-examen van 2014 werd in het veld ontvangen als wat moeilijk en mogelijk wat lang. Dit laatste werd overigens niet expliciet door de verzamelde data bevestigd: de laatste vragen van het examen werden niet in groten getale overgeslagen. Verrassend genoeg werd nogal eens de opmerking gehoord 'dat er zo veel exact rekenwerk in voorkwam'. De examenmakers menen dat dit voor een examen wiskunde B mogelijk als compliment bedoeld is... Hoe dan ook: met een gemiddeld cijfer van 6,4 en 25% onvoldoendes (bij een N-term van 1,4) bleken de 11327 kandidaten het netjes gedaan te hebben: iets beter dan in 2012, iets minder goed dan in 2013. Je zou voorzichtig kunnen concluderen dat de gevolgen van de aanscherping van de slaag/zakregeling inmiddels ook op leerlingniveau zijn aanbeland. Uit de door 559 docenten ingevulde *quick scan* blijkt dat een kleine 30% van de docenten de aansluiting van het examen op het gegeven onderwijs onder de maat vindt, terwijl ruim 70% deze aansluiting juist (dik) in orde acht. Misschien zegt dit niet zozeer iets over het

examen, maar mogelijk meer iets over de beleving van de docenten en de wijze waarop zij invulling geven aan het examenprogramma. De docenten belonen het examen overigens met een 6,4 – hetzelfde cijfer als de leerlingen gemiddeld behaalden. Maar dat zal toeval zijn. Het examen opende met de contextopgave *Kwelders* over de aanwezigheid van ganzen op kwelders. Een van de bedoelingen van zo'n eerste opgave (naast het toetsen van kennis en vaardigheden) is altijd om kandidaten een prettige start van het examen te laten beleven. Dat lijkt goed gelukt, de eerste vraag was de best gemaakte van het hele examen, en de vervolgvragen scoorden met p'-waarden van 79 en 74 ook prima. De vierde vraag was wat lastiger: lang niet alle kandidaten bleken in staat de gevraagde grenswaarde te vinden, ondanks (of juist dankzij?) het feit dat dit op meerdere manieren te doen was. Er mocht zowel redenerend vanuit de formule als met behulp van de grafische rekenmachine gewerkt worden. En blijkens de resultaten (ongeveer 40% scoorde hier geen punten en een even grote groep scoorde alle punten) was dit een onderscheidende vraag – en onderscheid maken is nu eenmaal een doel van een examen. De tweede opgave *Gebroken functie* had een gebroken functie als onderwerp. De drie vragen hierbij moesten exact worden aangepakt, en volgens de p'-waarden was dat voor de kandidaten bij vraag 5 (p' = 77) en vraag 7

(p' = 80) geen groot probleem. Bij vraag 6 (p' = 51) moest op algebraïsche wijze worden aangetoond dat een gegeven uitdrukking inderdaad de afgeleide was. Dit bleek voor een redelijke groep leerlingen vaak een lastige vraag, en soms werd er zelfs niet aan begonnen, zie figuur 7. Bij deze vraag werden aan het met juist gebruik van de kettingregel differentiëren twee scorepunten toegekend. Dit zijn twee 'ondeelbare' punten, maar uiteraard blijft ook dan gelden dat een verschrijving of rekenfout één scorepunt kost (vakspecifieke regel). Overigens: in het examen vwo wiskunde B zou bij deze vraag ongetwijfeld de formulering 'Bewijs' gebruikt zijn – en volgens de nomenclatuur is dit bij havo wiskunde B ook toegestaan. Daarom wijzen we op deze plek nog maar eens op de lijst met examen(werk) woorden, die immers als bijlage bij de syllabus officiële status geniet.^[7]

De derde opgave *Bloembak* betrof ruimtemeetkunde, vormgegeven in de contextsituatie van een bloembak. Het tekenen van het zijaanzicht bij vraag 8 bleek niet al te lastig, het oppervlakte-rekenwerk bij vraag 9 wel. Maar de in deze context logische (slot)vraag tot hoeveel centimeter onder de rand de potgrond komt, bleek voor veel kandidaten (te) lastig: met een p'-waarde van 29 bleek dit de slechtst scorende vraag uit het examen. Het bedenken van een juiste strategie, de formule voor de inhoud van een kegel paraat hebben, de uiteindelijke vraag niet vergeten te beantwoorden... In het licht van de komende vernieuwingen zou je dit een echte wiskundige denkactiviteit kunnen noemen. Vervolgens kwamen er weer twee 'kale' opgaven (*f* boven *g* en *Functie met logaritme*), waar de kandidaten met diverse formules uit de voeten moesten kunnen. Over de formulering van de introductie op vraag 12 ('Het maximum van *g* kan geschreven worden in de vorm $a\sqrt{b}$ met *b* een zo klein mogelijk geheel getal.') werd wel een en ander opgemerkt – en achteraf bezien was deze formulering wellicht ook niet optimaal. Maar anders zijn er wel heel veel vormen van exacte antwoorden mogelijk. Vraag 13 kende ook een voor leerlingen wat lastige formulering, waarbij de gezochte waarde van *x* op twee decimalen gegeven moest worden. Criticasters van deze vraag leken deze essentiële toevoeging niet altijd te hebben gelezen... Het bleek een flink onderscheidende vraag, waar de helft van de kandidaten geen punten scoorde en een vijfde deel van de kandidaten alle punten. Bij vraag 14 moesten (tot verrassing van sommige docenten) de vergelijkingen van de asymptoten van een logaritmi-

figuur 7 Uit: havo B (Gebroken functie)

Gebroken functie

De functie *f* is gegeven door $f(x) = \frac{60}{x^4 + 4}$.
In de figuur is de grafiek van *f* getekend.

figuur

De horizontale lijn met vergelijking $y = 2$ snijdt de grafiek van *f* in twee punten.

Voor de afgeleide van *f* geldt: $f'(x) = \frac{-240x^3}{(x^4 + 4)^2}$

40 6 Toon dit op algebraïsche wijze aan.

6 maximumscore 4

- Het functievoorschrift van *f* is te schrijven als $f(x) = 60(x^4 + 4)^{-1}$ 1
- Differentiëren geeft $f'(x) = 60 \cdot -1 \cdot (x^4 + 4)^{-2} \cdot 4x^3$ 2
- Hieruit volgt $f'(x) = -240x^3 \cdot (x^4 + 4)^{-2}$ en dit geeft $f'(x) = \frac{-240x^3}{(x^4 + 4)^2}$ 1

sche functie 'gewoon gegeven' worden, zonder verdere toelichting. Dat dit lang niet door alle kandidaten goed werd gedaan, moge blijken uit de p'-waarde (61). Bij vraag 15 (p' = 46) werd duidelijk dat lang niet alle kandidaten bij havo wiskunde B goed thuis zijn in het rekenen met logaritmen. In de opgave *Theezakje* (een in de ogen van de examenmakers mooi voorbeeld van een alledaagse context) kwam de ruimtemeetkunde nogmaals aan bod, zowel rekenend (vraag 16, p' = 72) als tekenend (vraag 17, p' = 61), met keurig resultaat. In de slotopgave, simpelweg *Twee functies* geheten, moesten de kandidaten laten zien dat ze exact konden werken met wortels en kwadraten. Dat dit voor veel kandidaten lastig is, zal geen verrassing zijn, zeker aan het eind van een toch drie uur durend examen.

Havo B pilot [Ruud Stolwijk]

De docenten die de in totaal 124 kandidaten voor het havo wiskunde B-pilotexamen van 2014 onder hun hoede hadden, vonden het een moeilijk examen. Door te kijken naar de prestaties op de met het reguliere examen overlappende vragen kon deze indruk worden bevestigd. Ook vond men het wat lang, en in tegenstelling tot bij het reguliere examen werd dit door de verzamelde data bevestigd. Ondanks deze kritiekpunten vond men het toch een aardig examen, voldoende tot goed aansluitend op het gegeven onderwijs, gewaardeerd met een 6,8, goed passend bij het pilotprogramma. De kandidaten werden beloond met een gemiddeld cijfer van 6,5 met 19,4% onvoldoendes (bij een N-term van 1,7). Ze hebben het hiermee net iets beter gedaan dan de reguliere kandidaten.

Over de overlappende opgaven (*Kwelders*, *f boven g* en *Functie met logaritme*) is in het gedeelte over het reguliere examen havo wiskunde B al een en ander opgemerkt. De pilotkandidaten doen het op deze opgaven eigenlijk overal wat beter. Dit kan komen door de in het nieuwe programma toegenomen aandacht voor algebraïsch en exact werken: in plaats van ruimtemeetkunde wordt analytische meetkunde gedaan en daarbij wordt nu eenmaal heel wat exact gerekend. Dat leerlingen daar dan vaardiger in blijken, mag nauwelijks verrassend zijn. Overigens is aan de reguliere opgave *Functie met logaritme* een pilotvraag toegevoegd, die het onderwerp transformaties extra onder de aandacht brengt. Hierbij diende aardig wat algebrakennis gebruikt te worden. Dit bleek voor de meeste kandidaten erg lastig (p' = 28). Toch bleek een vijfde van de kandidaten dit foutloos te kunnen.

De 'nieuwe meetkunde', in de syllabus *Meetkunde met coördinaten* geheten maar vaak aangeduid als *Analytische meetkunde*, kwam in het examen aan bod in drie opgaven. De eerste daarvan, *Krik*, had een krik als onderwerp, waarbij met behulp van de cosinusregel een afstand moest worden berekend. Dat de cosinusregel

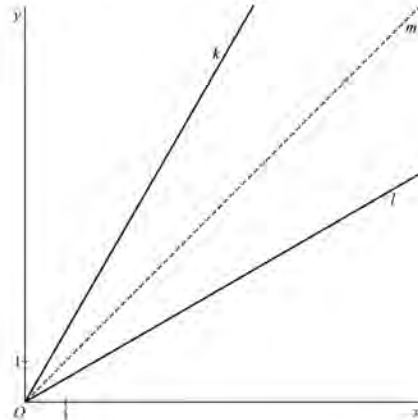
Bissectrices

De lijn k is gegeven door: $y = \sqrt{3} \cdot x$

De lijn l is gegeven door: $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$

De bissectrice van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke delen verdeelt. In de figuur hieronder is de bissectrice m van de hoek die de lijnen k en l met elkaar maken, gestippeld weergegeven.

figuur



op 16 Toon door exacte berekeningen aan dat de afstand van het punt $P(\sqrt{3}, 1)$ tot de x -as gelijk is aan de afstand van dit punt P tot de lijn k .

figuur 8 Uit: havo B pilot (Bissectrices)

gebruikt moest worden (twee keer zelfs), was aan de kandidaten zelf. Het binnen zekere grenzen zelf kunnen bepalen van een juiste wiskundige aanpak is immers deel van de vernieuwing en met een p'-waarde van 59 bleek dat de pilotkandidaten hierop waren voorbereid. De tweede opgave bij dit domein, *Bissectrices*, bleek heel wat lastiger – en dan vooral de tweede vraag, zie figuur 8. De loodlijn die hier nodig was, moest wel op de juiste lijn (k) geplaatst worden, en dat bleek lang niet bij alle kandidaten het geval. De derde meetkundeopgave, *De Eierland*, was de slotopgave van het examen. Deze opgave had als vraag hoeveel tijd een schip binnen het bereik van de Texelse vuurtoren De Eierland vaart. Deze opgave werd als leuk beoordeeld door de pilotdocenten en het bleek daarnaast ook een behoorlijk onderscheidende opgave te zijn: ruim een derde van de kandidaten scoorde zeven of acht punten, krap een derde scoorde nul of één. Overigens: het tweede figuur was toegevoegd om de kandidaten enige richting in hun aanpak te geven – er bleef immers nog genoeg over om zelf te bedenken.

De overige twee opgaven (*Gebroken functie* en *Twee functies*) betroffen analyse, waarbij ten opzichte van het reguliere examen enige aanpassingen waren gedaan. Dat de gebruikte gebroken functie net een wat andere functie was dan bij regulier, komt door de beperking die in het nieuwe programma aan 'kettingregelfuncties' is gesteld: de eerste stap mag

slechts een lineaire zijn. Zie de syllabus, te vinden op www.cve.nl/item/wiskunde_havo_vwo. Hier zijn trouwens ook de syllabi van de andere wiskundevakken te vinden. Bij dezen van harte aanbevolen, want in september 2015 worden de (bijgestelde) pilotprogramma's immers landelijk ingevoerd – en dat is als u dit leest al binnen een jaar! De andere opgave, *Twee functies*, illustreert dat in het nieuwe programma de productregel niet meer tot de havo B-stof zal behoren (al mag deze in het kader van het schoolexamen natuurlijk wel behandeld worden door de docent). Deze pilotopgave kan dus ook best in het nu nog reguliere programma – misschien een bruikbare tip voor toekomstige schoolexamens?

Vwo A

[Harco Weemink]

Het wiskunde A-examen bestond dit jaar uit vijf opgaven met daarin 21 vragen die maximaal 82 punten konden opleveren. Het aantal kandidaten waarvan via WOLF data is ontvangen, bedraagt 15154. Het examen is dit jaar door de docenten gemiddeld met een een krappe voldoende (5,6) beoordeeld. In de *quick scan* gaven ruim 300 van de 662 docenten aan dat het examen qua moeilijkheidsgraad precies goed was. Meer dan de helft beoordeelde de lengte van het examen als precies goed. Opmerkelijk was wel dat meer dan de helft van de docenten de inhoudelijke aansluiting op het onderwijs slecht of onvoldoende vond. Mede door een geconstateerde vaardigheidsstijging ten opzichte van 2011 (het laatste jaar voor het invoeren van de aangescherpte slaag/zakregeling) kreeg het examen uiteindelijk een N-term van 1,1 wat resulteerde in een gemiddeld cijfer van 6,6 met 16,3% onvoldoende. Een resultaat dat inligt tussen dat van 2013 en de resultaten van de jaren daaraan voorafgaand.

De eerste opgave van het examen, *Chips*, richtte zich op het gebruik van de normale verdeling. Al een aantal jaren blijkt dat vragen hierover beter worden gemaakt dan op grond van het vooronderzoek mag worden verwacht. Dit lijkt zijn oorzaak te hebben in de trainbaarheid van dit soort vragen in de voorbereiding op het

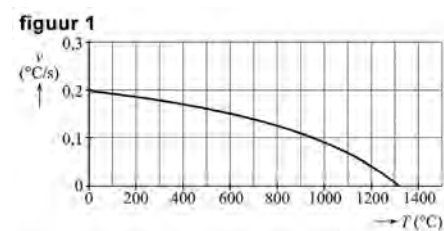
examen. Op het forum van de NVvW was enige discussie of bij vraag 1 gezien de context een afronding naar boven niet meer op zijn plaats was geweest. Het feit dat er in de stam geen sprake is van een eis dat 'ten hoogste' 0,2% een bepaald minimumgewicht mag hebben, maar dat het 'te lichte deel' 0,2% van het geproduceerde aantal vormt, geeft aanleiding om alleen de wiskundig correcte afronding als correct antwoord te hanteren.

De tweede opgave, *Ontslagvergoeding*, bevatte een economisch getinte context. Bij vraag 5, waar leerlingen met de informatie uit de stam een ontslagvergoeding moesten berekenen, was het aantal kandidaten dat twee van de drie te behalen punten scoorde opmerkelijk groot. Gezien de opmerkingen op het forum heeft veelal het fout doen van de eerste stap, het bepalen van het aantal dienstjaren, tot aftrek van dit ene punt geleid. Deze vraag kreeg een aanvulling op het correctievoorschrift waarin duidelijk werd gemaakt dat het ontbreken van het euroteken acceptabel was. De procentberekening bij vraag 6 leverde weinig problemen op, slechts 2% van de leerlingen scoorde hier nul punten op.

De vragen in de opgave *Keramik* resulteerden allemaal in p'-waarden tussen de 40 en 60. De afweging of een leerling bij vraag 8 voor het vermenigvuldigen van de twee incorrecte waarden het laatste scorepunt nog verdient, werd in deze vraag ondervangen door in het eerste scorepunt het inzicht dat er moest worden vermenigvuldigd te belonen. In vraag 9 bleek dat bij het opstellen van de afgeleide en het daarmee redeneren, zie figuur 9, leerlingen die kozen voor de aanpak met een schets in het algemeen meer punten scoorden dan leerlingen die probeerden een redenering op te stellen. Bij deze tweede aanpak bleek vooral het beschrijven van het gedrag van de noemer een valkuil voor veel kandidaten. De laatste twee vragen uit deze opgaven waren zoals van tevoren ingeschat niet makkelijk, maar met p'-waarden van respectievelijk 40 en 54 voor de betere kandidaten goed maakbaar.

Uitslagen voorspellen bevatte zowel de moeilijkste als de makkelijkste vraag uit dit examen. Uit de reacties op het forum valt af te leiden dat de eenvoudige vragen

figuur 9 Uit: vwo A (Keramik)



Omdat het over opwarmen gaat, is in figuur 1 alleen een niet-negatieve waarde van v weergegeven.

De formule die hierbij hoort, is de volgende:

$$v = 0,197 + \frac{T - 20}{8,16T - 17360}$$

Hierin is v de maximale opwarmingsnelheid van de oven in °C per seconde en T de temperatuur van de oven in °C.

Met behulp van de afgeleide van v kan men aantonen dat de maximale opwarmingsnelheid v steeds sterker daalt bij toenemende oventemperatuur.

op 9

Stel de formule op van de afgeleide van v en toon daarmee die steeds sterkere daling aan.

hierin door een deel van de docenten als te makkelijk worden beschouwd. De bedoeling van de examenmakers is om leerlingen middels een relatief eenvoudige vraag aan de context te laten wennen. Of dat in dit geval helemaal gelukt is, is de vraag omdat de vervolgvraag in dit geval de laagste p'-waarde van het examen opleverde. Hoewel het al een flink aantal jaren een terugkerende activiteit in het vwo A-examen is, blijkt het opstellen van een redenering nog steeds een lastige activiteit voor veel leerlingen. 'Alweer een voetbalvraag', verzuchtte een docent tijdens de examenbespreking, daarbij het vermoeden uitsprekend dat deze opgave door jongens veel beter zou worden gemaakt. Uit de analyse van de gegevens blijkt dat de eerste twee vragen uit de opgave *Toevalvoetbal* inderdaad beter gemaakt zijn door de jongens. Wanneer we echter de gehele context beschouwen, is de gemiddelde p'-waarde van de jongens weliswaar hoger, maar het verschil is nauwelijks meer dan het geconstateerde verschil op het gehele examen. De opmerking bij vraag 18 in het correctievoorschrift dat het gericht proberen, wat in veel gevallen rechtstreeks tot het juiste antwoord leidde, met de maximale score mocht worden beoordeeld, maakte van deze vraag een alles-of-niets-vraag waar 75% alle punten en 15% geen enkel punt behaalde.

De gegevens die via WOLF binnenkomen, geven de gelegenheid om wat specifiekere te kijken naar subgroepen. Evenals vorig jaar zijn de jongens iets vaardiger dan de meisjes, en het verschil is zelfs iets groter geworden. Het grootste verschil in p'-waarde vinden we bij de vragen 7 en 14. Opmerkelijk dat hier in beide gevallen naar een redenering wordt gevraagd. Als we kijken naar de profielen, dan levert dat geen afwijkend beeld op ten opzichte van de afgelopen jaren. De N&G-leerlingen scoren gemiddeld een 6,8 met 11,1% onvoldoendes en voor de E&M- en C&M-kandidaten liggen deze waarden op 6,6 en 15,4%, respectievelijk 6,1 en 27,5%.

Vwo A pilot

[Harco Weemink]

Dit jaar werd voor de derde keer het pilotprogramma voor vwo wiskunde A geëxamineerd. De maximale score was met 84 punten twee punten hoger dan het reguliere examen. Tijdens de examenbespreking met de pilotdocenten waren kritische geluiden te horen over zowel de lengte als de moeilijkheidsgraad van het examen. Dat bleek ook uit de *quick scan* ($n = 9$) waar het examen unaniem als te lang werd beoordeeld. Uit de analyse van de ingezonden gegevens van 213 leerlingen bleek dit ook; meer dan de helft van de vragen werd door meer dan 2% van de kandidaten overgeslagen. De inhoudelijke aansluiting bij het onderwijs was voor de meeste docenten wel voldoende, maar toch bleef de gemiddelde waardering steken bij een 5. De geconstateerde moeilijkheid in combinatie met de lengte van het

examen heeft geleid tot een uitzonderlijk hoge N-term van 2,1. Dit geeft een gemiddeld cijfer van 6,8 met 14,1% onvoldoende cijfers. Een resultaat dat in lijn is met de eerdere twee jaren. De overlap tussen het reguliere en het pilotexamen bedraagt ongeveer 43% van het totale puntenaantal. In de 'overlapopgaven' is er binnen de opgave naast een aantal identieke vragen gekozen voor pilotspecifieke vragen. De opgave *Uitslagen voorspellen* is hier een voorbeeld van. De eerste twee vragen zijn gelijk aan die in het reguliere examen, de derde vraag is afwijkend. Waar in het reguliere examen gevraagd werd naar het opstellen van een lineaire formule, is in het pilotexamen een meer open vraag opgenomen waar leerlingen zelf een aanpak moeten vinden. Deze meer open vraagstelling heeft ertoe geleid dat in dit geval 58% van de leerlingen geen punten wist te scoren voor deze vraag.

Omdat in het nieuwe programma de kansrekening en statistiek niet meer getoetst wordt op het centraal examen, is er meer ruimte voor algebraïsche activiteiten. In de tweede opgave, met de titel *De bevolking van Oeganda*, komt dit naar voren. In de derde vraag van deze opgave moesten de leerlingen een pittige afgeleide opstellen. Hierbij moest zowel de quotiëntregel als de afgeleide van een exponentiële formule worden gebruikt. Toch was de p'-waarde niet erg laag, waarschijnlijk omdat de afgeleide was gegeven en leerlingen aan

tabel 5 Vwo overlap A – A pilot 2014

	vraag nr. pilot	vraag nr. regulier	max score	p' pilot	p' regulier
Uitslagen voorspellen	1	13	3	95	92
	2	14	3	29	25
Keramiek	8	8	4	52	49
	9	9	6	35	42
	10	10	3	76	60
	11	11	5	45	40
Ontslagvergoeding	13	5	3	76	75
	14	6	5	84	86
	15	7	3	59	54
			35	59.1	57.0

figuur 10 Uit: vwo A pilot (Ontslagvergoeding)

Om een indruk te krijgen hoe de Zwartkruisformule werkt, bekijken we voor een topbestuurder ($F = 5$) hoe Z toeneemt als hij op leeftijd x ontslagen wordt. Hij is op zijn 40e in dienst gekomen. Zie de tabel.

tabel

x	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
Z	0,0	1,6	3,4	5,4	7,6	13,3	16,8	20,5	24,5	28,8	50,0

Voor de waarden van x van 40 tot en met 44 kun je een formule opstellen voor de ontslagvergoeding Z , uitgedrukt in x .

Dat kan door in de formule $Z = \frac{L \cdot D \cdot 5}{4}$ de variabelen L en D uit te

drukken in de leeftijd x , en de formule daarna te herleiden tot de vorm $Z = ax^2 + bx + c$

sp 17 Bereken de waarden van a , b en c .

moesten tonen dat het differentiëren dit resultaat had. In de laatste opgave moest het jaar van de snelste toename met behulp van deze afgeleide worden bepaald.

De opgave *Keramik* kwam ook voor in het A-examen. Hier kwam het verschil in vaardigheid tussen de reguliere en pilotpopulatie het duidelijkst aan het licht, zie tabel 5 voor de volledige resultaten. Vraag 9 werd relatief het slechtst gemaakt door de pilotleerlingen. In eerste instantie opvallend omdat uit de extra aandacht voor algebra te verwachten is dat voor pilotleerlingen een technische vaardigheid als differentiëren eenvoudiger zou zijn. Een mogelijke verklaring ligt in het tweede deel van de opgave. Door de pilotdocenten werd geopperd dat hun kandidaten door deze extra aandacht voor algebra minder snel geneigd zijn de (eenvoudigere) route met een schets van de grafiek te volgen. De laatste vraag van deze opgave week iets af van die in het reguliere programma: het pilotprogramma geeft de mogelijkheid om in het examen vragen te stellen over formules met e-machten. Hoewel deze vraag 12 door de docenten als mooie vraag werd betiteld, leverde het voor veel leerlingen een lage score op. Een p'-waarde van 34 was het resultaat.

De opgave *Ontslagvergoeding* bestond uit drie vragen die ook in het reguliere examen zaten, aangevuld met een staartje voor de pilotleerlingen. In dit staartje zat de moeilijkste vraag uit het examen, namelijk vraag 17, zie figuur 10. Hierin moest door substitutie en herleiding een tweedegraadsformule worden opgesteld. Maar liefst 15% van de kandidaten bleek deze vraag te hebben overgeslagen en slechts 5% wist de maximale score te behalen, de p'-waarde was met 25 de laagste van het examen. De pilotdocenten gaven aan dat de hier gevraagde activiteit zeker binnen het programma valt, maar dat dit erg moeilijk blijft voor de leerlingen.

In de opgave *Eb en vloed* werden vragen over goniometrische formules en verbanden gesteld, ook een nieuw onderdeel ten opzichte van de huidige examens. Waar de eerste twee vragen nog redelijke p'-waarden opleverden (55 en 44) was de laatste vraag met een p'-waarde van 37 wederom een erg lastige vraag. Het resultaat van deze vraag viel tegen omdat vijf van de zes punten verdiend konden worden met de goed trainbare activiteit van het opstellen van een goniometrische formule. In hoeverre de moeilijkheidsgraad van de rest van dit examen invloed heeft gehad op de resultaten naar het eind toe is moeilijk in te schatten.

Zoals sinds het eerste pilotexamen gebruikelijk, is de laatste opgave een korte onderzoekopgave, één vraag bij een context die leerlingen niet stuurt in de richting van een oplossingsstrategie en die bij voorkeur ruimte biedt voor meerdere routes naar de gevraagde oplossing. Naast andere aanpassingen in het examen is dit een voorbeeld van het denkactieve aspect uit de vakvernieuwing. In dit geval is gekozen voor een context die ook voorkwam in het reguliere examen. Door geen instap-

vraag te stellen, ligt de weg naar het juiste antwoord minder 'op de stip'. In dit geval heeft deze vraag geleid tot een p'-waarde van 28, wederom mogelijk negatief beïnvloed door de lengte en moeilijkheidsgraad van de rest van het examen.

Vwo C

[Harco Weemink]

In het wiskunde C-examen van dit jaar zaten twee opgaven die gedeeltelijk overlap vertoonden met het A-examen. Er was een overlap van 19 punten, hetgeen betekent dat er sprake was van 24% identieke vragen. In totaal konden de leerlingen 79 punten behalen, verdeeld over 21 vragen. Van 1652 kandidaten zijn de resultaten via WOLF ontvangen en gebruikt voor de analyses. Het aantal kandidaten dat het wiskunde C-examen aflegt, vertoont al enige jaren een dalende trend. In 2012 was de analyse nog gebaseerd op ruim 2800 kandidaten. Het wiskunde C-examen kreeg net als het A-examen slechts een krappe voldoende van de 309 docenten die de *quick scan* invulden. Meer dan de helft vond het examen (te) moeilijk en bij de lengte van het examen werd door een ruime meerderheid 'precies goed' ingevuld. Op het punt van de inhoudelijke aansluiting bij het onderwijs waren de meningen verdeeld. Kijkend naar de analyses valt het op dat relatief weinig vragen een p'-waarde tussen de 50 en de 70 hebben. Hoewel slecht één vraag onder de $p' = 30$ scoorde, bleek het totale examen aan de moeilijke kant. Met de geconstateerde vaardigheidsstijging op de kernvakken heeft dit geresulteerd in een N-term van 1,4 waarbij het percentage onvoldoende op 15,4% kwam te liggen en het gemiddelde cijfer een 6,6 werd.

Het examen had met *De Palio van Siena* een niet al te moeilijk begin. Na een gemiddelde-snelheid-berekening was de combinatorievraag met een p'-waarde van 79 goed te doen. De daaropvolgende kansvraag, waar geen sprake was van een binomiale of normale kansverdeling, bleek een stuk lastiger ($p' = 41$).

Opvallend hierbij was het percentage leerlingen (39%) dat geen enkel punt op deze vraag scoorde. Bij vraag 4 kon een binomiale kansverdeling worden gebruikt en deze trainbare activiteit leverde meteen een flink hogere p'-waarde van 79 op.

In de context *Spiraalvormen* werd onder andere een beroep gedaan op het kunnen rekenen met groeifactoren. Het omrekenen van groeifactoren is een veelgevraagde activiteit in examens, maar dan meestal in een tijdscontext. Gezien de lage p'-waarden was de transfer om deze vaardigheid in een niet-tijd-gebonden-context om te zetten een brug te ver voor veel leerlingen. Vraag 6 leverde dan ook de laagste p'-waarde van het examen op. In de laatste vraag van deze opgave werd gevraagd om de formule $A = 9 \cdot 0,87^n$ te herleiden tot de vorm $\log(A) = a \cdot n + b$. Hierbij werd de eerste stap van deze herleiding $\log(A) = \log(9 \cdot 0,87^n)$ weggegeven,

	vraag nr. wis A	vraag nr. wis C	max score	p' wis A	p' wis C
Keramiek	8	18	4	49	32
	12	20	6	54	49
Uitslagen voorspellen	13	9	3	92	93
	15	11	2	82	81
	16	13	4	40	32
			19	58,9	52,2

tabel 6 Vwo overlap A – C 2014

Je kunt een overzicht maken van alle onderlinge afstanden tussen de voorspellingen van de lijsttrekkers. Een klein stukje van dat overzicht zie je in tabel 2. Zo lees je bijvoorbeeld af dat de afstand tussen de voorspellingen van Roemer en Halsema 24 is.

tabel 2

afstanden	Wild.	Roem.	Hals.	Verd.	Coh.	Balk.	Pecht.	Rut.	Thie.	Sta.	Rou.
Roemer	28	0	24	26	22	20	18	18	18	18	18
Halsema	34	24	0	36	22	26	20	18	26	24	16

Als je dat hele overzicht zou bekijken, dan zou opvallen dat alle afstanden even getallen zijn. Dat is geen toeval, dit geldt altijd bij twee voorspellingen. Je kunt beredeneren dat de afstand tussen twee voorspellingen altijd een even getal is. Het begin van zo'n redenering zou er als volgt uit kunnen zien:

We gaan eerst uit van twee voorspellingen die precies hetzelfde zijn. Dan is hun afstand gelijk aan 0. We gaan nu een verschil aanbrengen en maken daarna dat verschil steeds groter. We beginnen door in de eerste voorspelling ergens één zetel weg te halen.

op 10 Maak de redenering af en laat daarmee zien dat de afstand tussen twee voorspellingen altijd een even getal is.

figuur 11 Uit: vwo C (Uitslagen voorspellen)

zodat alleen het kunnen toepassen van de rekenregels voor logaritmen, die nog steeds op pagina 2 van het C-examen gegeven zijn, overblijft. Desondanks haalde 52% van de kandidaten geen enkele punt voor deze vraag.

De eerste opgave die overlap met het A-examen vertoonde, was *Uitslagen voorspellen*. Bij vraag 9 en 11 scoorden de C- en A-leerlingen ongeveer even goed, bij vraag 13 scoorden de A-leerlingen gemiddeld 8 p'-punten hoger, zie tabel 6. Waar bij het wiskunde A-examen van de leerlingen gevraagd werd om te onderzoeken of het mogelijk is dat een afstand een oneven getal is, werd bij C in vraag 10, zie figuur 11, gegeven dat het altijd een even getal moet zijn en een begin van een redenering die gevraagd werd om af te maken. Waar deze vraag in het A-examen een p'-waarde van 25 opleverde, was het duwtje in de rug voor de C-leerlingen voldoende om de p'-waarde op 40 uit te laten komen. De, ten opzichte van het A-examen, extra vraag 12 had als bedoeling om de C-leerlingen iets meer houvast te geven richting de vervolgvraag waar ze de formule van een lineair verband moesten opstellen.

In de wiskunde C-specifieke opgave *Gezichten herkennen* ging het weer om kansrekening. Eerst een drietal kansgerelateerde vragen, waar de rechttoerechtaanvraag met de normale verdeling een te verwachten hoge p'-waarde van 94 opleverde. In de vervolgvraag waar de wortel-n-wet moest worden toegepast, daalde

deze waarde naar 59. Het scorepatroon doet vermoeden dat nogal wat leerlingen de wortel-n-wet niet of niet correct hebben toegepast.

Twee van de vier vragen uit de laatste opgave *Keramiek* kwamen ook in het wiskunde A-examen voor. Opvallend groot was het verschil in p'-waarde van vraag 18 (vraag 8 in het A-examen), de A-leerlingen scoorden gemiddeld maar liefst 17 p'-punten hoger dan de C-leerlingen. Bij de redelijk technische bewerking die in vraag 20 van de leerlingen werd gevraagd, scoorden de A-leerlingen slechts iets beter dan de C-leerlingen. Met vraag 21 zat er een pittige vraag aan het eind. De leerlingen werd gevraagd om, bij gegeven temperatuurformule, de snelheid waarmee de temperatuur op een bepaald moment daalt te berekenen. Iets wat een kandidaat hoogstwaarschijnlijk niet algebraïsch kan en daarom werd expliciet in de vraag aangegeven dat dit zowel met de GR als met een differentiequotiënt mocht gebeuren. Rest nog om op te merken dat uit de analyses bleek dat de jongens, hoewel flink in de minderheid, gemiddeld 3,2 p'-punt hoger scoorden dan de meisjes. Een verschil dat behoorlijk groter is dan bij het examen van 2013.

Vwo C pilot

[Harco Weemink]

Over het wiskunde C-pilotexamen waren de pilotdocenten (vijf in getal) tevreden. Het examen bevatte een goede implementatie van de nieuwe onderwerpen en scoorde gemiddeld een 7,2. De kleine groep van ongeveer 40 leerlingen die dit examen gemaakt heeft, scoorde gemiddeld 45,5 punten op een maximum van 73, verdeeld over 22 vragen. Dit examen kreeg een N-term van 0,9 waardoor het gemiddelde cijfer op een 6,5 uitkwam en 24,3% van de leerlingen een onvoldoende scoorde. Het gemiddelde cijfer is daarmee gelijk aan dat van de voorgaande twee jaren dat het pilotexamen is afgenomen, het percentage onvoldoendes ligt iets hoger. De overlap met het reguliere wiskunde C-examen bedroeg 34 punten (47%) hetgeen redelijk overeen komt met de hoeveelheid overlap in de examenprogramma's van het oude en het nieuwe programma. Goed om te vermelden is dat de overlap met A-pilot minimaal is. Dit jaar zijn er slechts twee vragen – vraag 1 en vraag 8 met een totaal van zeven punten – die zowel in C-pilot als A-pilot voorkomen.

tabel 7 Vwo overlap C – C pilot 2014

	vraag nr. pilot	vraag nr. regulier	max score	p' pilot	p' regulier
Uitslagen voorspellen	1	9	3	93	93
	2	11	2	82	81
	3	12	2	81	87
	4	13	4	31	32
Spiraalvormen	12	5	4	77	80
	13	6	6	26	29
	14	7	3	77	73
Keramiek	15	18	4	42	32
	17	20	6	43	49
			34	54,4	55,2

De vragen in *Uitslagen voorspellen* kwamen ook allemaal in het reguliere C-examen voor. Tussen de resultaten van beide groepen was weinig verschil te zien, zie tabel 7. De opgave *Spiraalvormen* was, op de laatste vraag van C-regulier na, identiek. Ook hier lagen de scores van de pilotleerlingen dichtbij die van de reguliere leerlingen. Het grootste verschil werd geconstateerd in de derde opgave die overlap vertoonde, *Keramiek*. Op de eerste vraag uit deze opgave, een telgerelateerde vraag, werd door de pilotleerlingen gemiddeld tien p'-punten hoger gescoord. Een verklaring hiervoor zou gevonden kunnen worden in het feit dat in het pilotexamen geen vragen over kansrekening en statistiek worden gesteld en dat er daardoor meer aandacht is voor de combinatoriek. Als we kijken naar de p'-waarden in alle overlapvragen blijkt dat de pilotpopulatie nagenoeg even vaardig is als de reguliere. De opgave *Hogeschool voor de kunsten* richtte zich op het nieuwe domein Vorm en Ruimte. In de eerste twee vragen moest de verhouding tussen de inhoud van een schaalmodel en het werkelijke kunstwerk worden berekend en bepaald worden wat het aantal mogelijke zijvlakken is dat je ziet als je naar een kubus kijkt. Bij vraag 7, zie figuur 12, werd van de leerlingen gevraagd om uit te leggen dat het kunstwerk in werkelijkheid lager is dan de deur. In de bespreking bleek dat het voor veel leerlingen erg lastig is om een dergelijke redenering begrijpelijk en vooral sluitend op te schrijven, waarmee dit een erg lastig te corrigeren vraag voor docenten was. De tweede mogelijkheid uit het correctievoorschrift om het met een schets van een zijaanzicht te doen, bleek nauwelijks door kandidaten toegepast. In de laatste vraag in deze opgave moest van een foto op de uitwerkbijlage de hoogte waarop deze foto is genomen worden bepaald. De eerste stap, het tekenen van de horizon, is een activiteit die reeds meerdere malen in de afgelopen pilotexamens is voorgekomen. Hier bleek

figuur 12 Uit: vwo C pilot (Hogeschool voor de Kunsten)

Hogeschool voor de Kunsten

Bij de Hogeschool voor de Kunsten in Utrecht stond een kunstwerk in de vorm van een kubus waarvan één hoekpunt is afgezaagd. Er zijn enkele foto's gemaakt met de camera op verschillende hoogte.

foto 1



foto 2



Op foto 1 lijkt het kunstwerk hoger dan de witte deur erachter. Op foto 2 lijkt het kunstwerk ongeveer even hoog als de deur. Foto 2 is op ongeveer 150 cm hoogte genomen. De hoogte van de deur is in werkelijkheid 230 cm.

sp 7 Leg uit dat het kunstwerk in werkelijkheid lager is dan de witte deur.

een aanvulling op het correctievoorschrift noodzakelijk omdat de afrondinstructie in de vraag niet strookte met de toevoeging 'of nauwkeuriger' in het beoordelingsmodel.

In de opgave *Versregels* kwam een klein onderdeel over rijen, wat weer in het examenprogramma is opgenomen, aan de orde. Na een telprobleem en het uitschrijven van een aantal mogelijkheden werd in vraag 11 gevraagd om de gegeven regelmaat door te rekenen. Hoewel dit natuurlijk handmatig mogelijk was, en vermoedelijk ook door veel leerlingen zo opgelost werd, kon dit ook met behulp van een rij op de GR worden berekend. Tijdens de examenbespreking bleek dat slechts een klein deel van de leerlingen zag dat hier eigenlijk gewoon de rij van Fibonacci, die in het lesmateriaal was behandeld, werd neergezet. Met $p' = 46$ werd dit beschouwd als een moeilijke, maar mooie vraag.

Hoewel de opgave *Keramiek* ook in het reguliere examen voorkwam, is in een tweetal vragen in deze context getracht de gevraagde activiteit denkactiever te maken. Bijvoorbeeld bij vraag 16: waar in het reguliere C-examen rechtstreeks een berekening wordt gevraagd, is in het C-pilotexamen sprake van een vraag waarbij de leerling moet onderzoeken of een gemiddelde temperatuurstijging meer dan twee keer zo groot is. De uiteindelijke p'-waarden bleken trouwens bijna gelijk te zijn. In de laatste opgave, *Hoogopgeleid?*, werden vragen bij het nieuwe domein Logisch redeneren gesteld. Aan de hand van een strip van Sigmund werd van leerlingen onder andere gevraagd het verband te leggen tussen beweringen met logische symbolen en tekstuele beweringen. De eerste drie vragen met allemaal een maximale score van twee punten, leverden p'-waarden op van 66, 93 en 54. Soms bleek de gevraagde redenering zo eenvoudig dat leerlingen er meer achter zochten, bijvoorbeeld bij vraag 21 waar het volgens een pilotdocent bijna voldoende was geweest om te antwoorden met 'modus tollens'. Een laatste opvallende constatering uit de analyses is dat de correlatie tussen enerzijds de scores op de pilotspecifieke examenonderdelen zoals Vorm en Ruimte en Logisch redeneren en anderzijds de meer traditionele examenonderdelen bijzonder laag was. Het lijkt erop dat de gevraagde vaardigheid op een aantal van deze nieuwe onderdelen een andere is dan bij de rest van het programma.

Wvo B

[Ruud Stolwijk]

Vorig jaar eindigde het gedeelte van het *Euclides*-artikel van de toetsdeskundigen van Cito over het examen vwo wiskunde B als volgt: 'Maar laten we niet vergeten: de leerlingen hebben ook gewoon erg goed gepresteerd! Beter ook dan vorige jaren, zo heeft onderzoek van CvE en Cito aangetoond. [...] 16,5% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,9. Dit is duidelijk hoger dan voorgaande jaren: in 2010 en 2011 was het

gemiddeld cijfer 6,4 en vorig jaar was dit 6,5. Ik (en u ongetwijfeld ook) ben nu al benieuwd hoe het volgend jaar zal zijn...’ Welnu, inmiddels weten we het resultaat: Met een N-term van 1,0 leverde het examen vwo wiskunde B dit jaar een gemiddeld cijfer op van 6,6 met 22,3% onvoldoendes. Iets beter dan in 2012, wat minder dan in 2013. Was vorig jaar een positieve uitschieter en zal het nu stabiliseren? We zijn benieuwd hoe het beeld in 2015 zal zijn...

De docenten leken dit jaar wat minder tevreden met het examen vwo wiskunde B dan de afgelopen jaren het geval is geweest. Men vond het examen wat aan de moeilijke kant. Ter herinnering: vorig jaar vond men het examen wat aan de (al te) makkelijke kant; misschien dat dat mede van invloed is geweest op het oordeel van docenten over het moeilijkheidsgehalte van het examen van dit jaar. Verder vond de meerderheid het qua lengte in orde en een minderheid vond het te lang. De afnamegegevens onderschrijven dit beeld; er kan sprake van enige tijdnood zijn geweest, maar niet in al te grote mate. Opvallend was de kritiek op het gebruik van de formulering ‘Bewijs’, die in ieder geval voor een flink aantal docenten verrassend leek te zijn. Los van de aandacht die door het CvE aan de nomenclatuur is gegeven^[8], is het in dit kader wellicht wijs om het artikel in *Euclides* 88-4 over (werk)woorden in de centrale examens nog eens na te lezen en er in de examenklassen aandacht aan te besteden.^[7] Uit de *quick scan* blijkt dat een kwart van de 652 docenten het examen een onvoldoende waard vond en het gemiddeld cijfer dat het examen kreeg, was met 6,0 aan de magere kant.

De eerste opgave van het examen, *Bal in de sloot*, begon meteen met een ‘Bewijs’-vraag. Driekwart van de kandidaten bleek perfect in staat deze vraag (p’ = 86) te beantwoorden. Aangezien de tweede vraag een p’-waarde van 83 scoorde, kan gesteld worden dat er met de keuze van de startopgave dit jaar niet veel mis was.

De eerste vraag van de tweede opgave (*Boven en onder de lijn door de buigpunten*) kende nadrukkelijk de opdracht dat het aantonen van de formules met behulp van primitiveren diende te gebeuren. Het differentiëren van de gegeven functie was hier niet de bedoeling, zo gaf de opmerking bij het correctievoorschrift van vraag 3 ook aan. De aanvulling op het correctievoorschrift, tot stand gekomen na commentaren uit het veld nuanceerde dit enigszins – en terecht. Vraag 4 en 5 zorgden niet voor al te grote problemen en werden ‘gewoon tot goed’ gemaakt. Een interessante vraag is of de lijn door de buigpunten van een vierdegraadsfunctie altijd een dergelijke vergelijkbare situatie oplevert – maar dat is misschien meer iets voor een andere rubriek in dit blad.^[9]

Als derde opgave fungeerde de opgave *Grafiek verdeelt rechthoek*, een bij wiskunde B vwo niet ongewone

Gemeenschappelijk met de x-as

Voor elke waarde van a met $a \neq 0$ is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = 2\sin(ax) + \sin(2ax)$. Het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$ is een gemeenschappelijk punt van de grafiek van f_a en de x-as.

- 4p 13 Bewijs dat voor elke waarde van a (met $a \neq 0$) de grafiek van f_a de x-as in $(\frac{\pi}{a}, 0)$ raakt.
- 5p 14 Bewijs dat de grafiek van f_2 puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

figuur 13 Uit: vwo B (Gemeenschappelijk met de x-as)

zeven-punter. Om deze opgave tot een goed einde te brengen, moeten heel wat stappen op de juiste wijze gezet worden, en maar liefst 40% van de kandidaten slaagde daar foutloos in.

De goniometrie kwam op twee plekken in dit examen aan bod, als eerste in de opgave *De ideale stoothoek*. Bij vraag 6 en 7 mocht dan wel moest (in een contextsituatie) de grafische rekenmachine ingezet worden, met goed resultaat (zie de p’-waarden in de tabel). Vraag 8 vroeg om een exacte berekening van een ideale stoothoek in een denkbeeldige situatie, waarbij de kandidaat niet om de afgeleide van goniometrische functies heen kon. Met een p’-waarde van 63 was dat voor de meeste kandidaten geen onoverkomelijk probleem. De tweede opgave waar goniometrie een rol speelde, was de opgave *Gemeenschappelijk met de x-as*. Dat bleek tot veler verrassing (vast niet alleen van de examenmakers zelf) de slechtst gemaakte opgave uit het hele examen. Bij vraag 13 bleek dikwijls over het woord ‘raakt’ heen gelezen te zijn, met tot gevolg dat bijna driekwart van de kandidaten hier geen punten wist te scoren, zie figuur 13. Verder bleek bij vraag 14 dat het onderwerp puntsymmetrie nog altijd tot het examenprogramma vwo wiskunde B behoort, in tegenstelling tot wat zo hier en daar ‘in het veld’ te beluisteren viel. Dat 55% van de kandidaten hier geen punten wist te behalen, doet hopelijk niet vermoeden dat dit onderwerp niet meer behandeld zou worden.

Een opmerkelijke opgave was de opgave *Even lang*. In deze opgave werd zowel meetkundig als analytisch een en ander van de kandidaat verwacht – met name bij vraag 12. Het bewijzen dat twee lijnstukken even lang zijn, vereiste gebruik van een gegeven gelijkvormigheid, en dat was voor velen een brug te ver. Dat in dat bewijs netjes alle tussenstappen genoteerd moesten worden, was voor sommige docenten zuur – maar de lijst met examen(werk)woorden is hierin nu eenmaal helder: ‘Bewijzen: Een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.’ En bij ‘exact’ valt te lezen: ‘Stap voor stap’.

Desalniettemin moet gezegd worden dat de combinatie van analyse en meetkunde, zoals die in deze opgave voorlag, achteraf gezien misschien geen al te gelukkige was. Gelukkig lieten de kandidaten zich hierdoor niet

echt van hun stuk brengen, want met een p' -waarde van 94 was de eerstvolgende vraag (vraag 15) de hoogst scorende van het hele examen. De context waarbinnen deze vraag gesteld werd, *Hoogwaterstanden*, vereiste verder bij vraag 16 ($p' = 54$) verstandig gebruik van de grafische rekenmachine en bij vraag 17 ($p' = 60$) het vermogen een stelsel van twee vergelijkingen met evenzovele onbekenden op te lossen. De slotvraag van het examen was een meetkundevraag waarvan de titel (*Koordenvierhoek*) al aangaf waar het over ging. Met een (zeker voor meetkunde) keurige p' -waarde van 62 bleek dat de kandidaten over het algemeen netjes aan de eindstreep van dit examen wisten te komen en 44% van hen deed dat bij deze slotvraag zelf foutloos.

Vwo B pilot

[Ruud Stolwijk]

Voor de derde keer werd er een pilotexamen vwo wiskunde B afgenomen, met dit jaar 166 kandidaten. Waar er de afgelopen twee jaar wel enige ophef over dit examen was, verliep het dit jaar zonder echte incidenten of bijzonderheden. Wel vonden de pilotdocenten het examen te lang – al werd dat niet door de data bevestigd. Opvallend feit: uit de prestaties op vragen die ook in het reguliere examen zaten (het betreft hier vragen in de opgaven *Bal in de sloot*, *Boven en onder de lijn door de buigpunten*, *Grafiek verdeelt rechthoek* en *De ideale stoothoek*), bleek dat de pilotkandidaten het op deze onderdelen heel wat minder goed deden dan de reguliere kandidaten. De twee (identieke) startvragen scoorden beide meteen al zeven p' -punten lager dan bij het reguliere examen. Dat het gemiddeld cijfer voor de pilotkandidaten iets (om preciezer te zijn: 0,1) lager

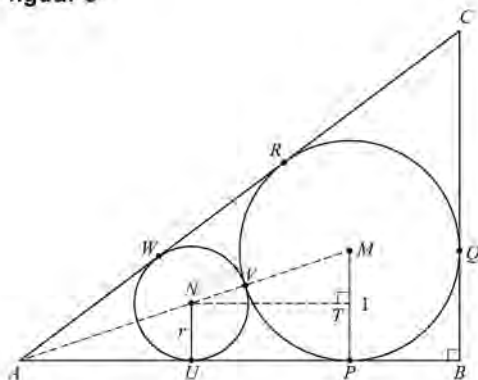
uitviel dan voor de reguliere lijkt dan logisch: een gemiddeld cijfer van 6,4 en 31,3% onvoldoendes bij een N -term van 1,7.

Over de overlapopgaven valt een en ander te lezen bij het gedeelte van dit artikel dat het examen vwo wiskunde B regulier als onderwerp heeft. Hierbij zij nog wel opgemerkt dat de eerste vraag van *De ideale stoothoek* in het pilotexamen een andere was, dit om de snelheid bij een bewegend punt onder de aandacht te brengen. Immers, binnen parameterrepresentaties is er in het nieuwe programma vwo wiskunde B nadrukkelijk aandacht voor beweging. Dit viel ook terug te vinden in de opgave *Vierkant op een driehoek*. De p' -waarden (14 en 34) wijzen uit dat deze opgave door de kandidaten als bijzonder moeilijk werd ervaren. Het werken met vectoren, in combinatie met goniometrie, bleek niet eenvoudig.

Een belangrijk onderdeel van het nieuwe programma is natuurlijk het domein Meetkunde met coördinaten – in het veld vaak Analytische meetkunde genoemd. Dit domein kwam aan de orde in de opgave *Cirkels in een driehoek*. De drie vragen van deze opgave betroffen berekeningen en redeneringen aan de hand van Pythagoras en gelijkvormigheid, en uit de p' -waarden (die alle drie rond de 60 lagen) blijkt dat de pilotkandidaten dit redelijk in de vingers hebben. Bovendien bleken de kandidaten met name bij vraag 5 in staat tot een veelheid aan juiste oplossingsmethoden, waar het correctievoorschrift er slechts eentje beschreef. Gelukkig leverde dat geen correctieproblemen op, de verschillende stappen in de diverse oplossingen lieten zich goed onderscheiden en beoordelen, zie figuur 14. Dat vectoren ook bij dit domein horen, moge duidelijk zijn, zie de al genoemde opgave *Vierkant op een driehoek*. Overigens: ook zwaartepunten zijn onderdeel van het nieuwe meetkundeprogramma – maar die kwamen dit jaar niet aan bod in het examen. Wel kwam het inproduct aan bod en wel in de opgave *Gespiegelde raaklijnen*. Met een p' -waarde van 43 vielen de prestaties hier wellicht wat tegen. Op het gebied van de analyse zijn er niet heel veel wijzigingen in het programma te vinden. Eigenlijk is de terugkeer van de perforatie de meest opvallende – maar die zat er dit jaar niet in. Wel werd er gevraagd naar een verticale asymptoot, die uiteraard (zoals het vwo wiskunde B waar mogelijk betaamt) netjes exact moest worden gevonden. Dit in tegenstelling tot de zonder nadere uitleg te geven asymptoten bij het examen havo wiskunde B! De opgave *Gebroken goniometrische functie* vereiste bij de kandidaten kennis van goniometrische functies, asymptoten en (net als in het reguliere examen) puntsymmetrie. Op zichzelf zou deze opgave voor reguliere kandidaten ook best mogelijk moeten kunnen zijn – misschien een tip om deze als oefenopgave in te zetten? Werken met een parameter in een goniometrische situatie is immers een mooie denkactiviteit.

figuur 14 Uit: vwo B pilot (*Cirkels in een driehoek*)

figuur 3



Er geldt: $AU = 3r$.

- 3p 4 Bewijs dit.
- 5p 5 Bereken r . Rond je antwoord af op twee decimalen.

Noten

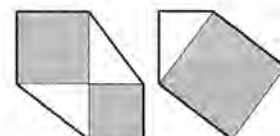
- [1] Zie www.cito.nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/centrale_examens. Hier treft u overigens niet alleen de betreffende tabellen maar uiteraard ook de examens, uitwerkbijlagen en correctievoorschriften aan.
- [2] De p'-waarde is de geconstateerde gemiddelde score van een vraag, een opgave of een compleet examen, uitgedrukt in een percentage van de maximumscore van die vraag, opgave of examen.
- [3] WOLF: Windows Optisch Leesbaar Formulier
- [4] Hier is een kanttekening op zijn plaats: omdat de aantallen in de tabellen en de grafiek gebaseerd zijn op de aanvragen van scholen voorafgaand aan de examens, zijn deze aantallen groter dan de werkelijke: scholen nemen meestal een zekere veiligheidsmarge.
- [5] Mocht u geïnteresseerd zijn in deelname aan een dergelijke constructiegroep: elk jaar rond januari wordt er door het Cito geworven voor die constructiegroepen waar er 'vacatures' zijn. Zie daarvoor ook de voornoemde Citosite.
- [6] Zie *Euclides*, 88,(1), 2012.
- [7] Drijvers, P., & Tjon Soei Sjoë, K. (2013). (Werk) woorden in de centrale examens, *Euclides*, 88(4).
- [8] Bijvoorbeeld via de *WiskundeBrief*, zie www.wiskundebrief.nl/examenwoorden.htm
- [9] Uw reacties zijn van harte welkom op vakbladeuclides@nvvw.nl

RECTIFICATIE

In nummer 7 van jaargang 89 is helaas bij de boekbespreking *Wiskunde, dat kun je begrijpen* van Ernst Lambeck een illustratie weggevallen. Hieronder alsnog de afbeelding waar in de tekst naar verwezen wordt.

figuur 1 Opgave 6 van hoofdstuk 8 *Aanschouwelijke meetkunde*

- 6 Leonardo da Vinci bedacht dit bewijs van de stelling van Pythagoras: Het komt erop neer dat de beide zeshoeken die de vierkanten omsluiten, gelijke oppervlakte hebben. Verklaar dit.



Over de auteurs

Ivo Claus, Ger Limpens, Melanie Steentjes, Ruud Stolwijk, Harco Weemink zijn wiskundemedewerkers en toetsdeskundigen van het Cito in Arnhem (www.cito.nl). Hun e-mailadressen zijn achtereenvolgens: ivo.claus@cito.nl, ger.limpens@cito.nl, melanie.steentjes@cito.nl, ruud.stolwijk@cito.nl en harco.weemink@cito.nl.