EEN KIJKJE IN DE KEUKEN BIJ DE EXAMENCONSTRUCTIE

Sjoerd Crans
Jos Remijn

Examenopgaven componeren is een kunst op zich. Van een niet zelden toevallig gevonden context tot de opgave zoals die op het examen staat is een lange weg waarin veel fasen worden doorlopen. En dat alles in het grootst mogelijke geheim. Sjoerd Crans en Jos Remijn, toetsdeskundigen van Cito, reconstrueren dat proces van één opgave, *Karpers*, uit het examen havo wiskunde B 2016-1.

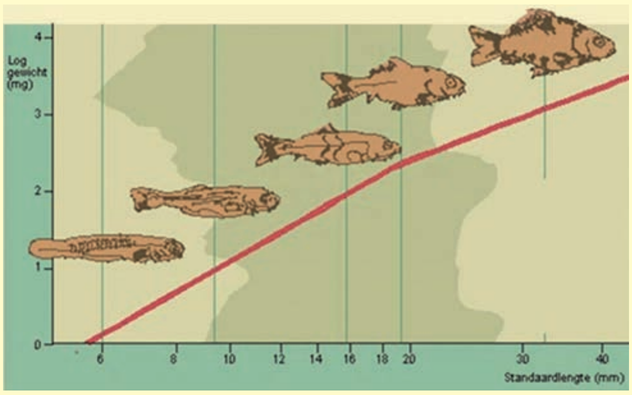
Examenopgaven worden bedacht door docenten, bij Cito constructeurs genoemd. Deze constructeurs zijn docenten die ook daadwerkelijk les geven in de (voor) examenklassen van het betreffende vak. Een dag per week werken zij voor Cito en zijn voor die dag door hun school vrijgesteld van hun lesgevende taak. Nieuwe constructeurs worden geworven door middel van een advertentie in de krant, op de Cito-website en in de WiskundE-brief. Voor het vak havo wiskunde B werkten tijdens het ontstaansproces van de opgave *Karpers* vier constructeurs.
In dit artikel bekijken we het traject van een examenopgave zoals dat met de constructeurs wordt doorlopen.

Idee

Een examenopgave begint met een idee. Hoe komt zo'n idee tot stand? Door rond te kijken en attent te zijn op wiskunde in de praktijk. Je ziet wat, je leest wat. Een artikel met een wiskundig tintje kan een basis zijn. De oerbron voor de opgave *Karpers* is het artikel 'De mens als foetale aap' op Kennislink.[1] Dat gaat niet over karpers, zult u zeggen. Toch wel: in het artikel komt de volgende passage voor:

Bij een lengte van circa 19 millimeter treedt er vrij plotseling een verandering op in de groeicoëfficiënt b. Zodra karpers die lengte bereiken wordt de coëfficiënt 3,12. Die waarde van de exponent ligt dicht bij 3. Wanneer tijdens de groei het volume – en bij gelijkblijvende lichaamssamenstelling dus ook het gewicht – evenredig toeneemt met een derde macht van een lengte, spreken we van *isometrische* groei. Lengte, breedte en hoogte nemen in zo'n geval in een gelijk blijvende verhouding toe, wat betekent dat de lichaamsvorm niet verandert.

Tijdens de eerste fasen van de groei is de groeicoëfficiënt niet 3,12 maar 4,47. Een volume kan niet toenemen met meer dan een derde macht van een lengtemaat, tenzij er vormveranderingen optreden. Blijkbaar veranderen breedten en hoogten tijdens larvale groei meer dan bij isometrische groei kan worden verwacht. Deze ongelijkmatige groei noemt men allometrie. De enorme vormveranderingen die tijdens de ontwikkeling van een karperlarve plaatsvinden, zijn er een voorbeeld van. Niet alleen uitwendig, maar ook in de groei van de organen treden allometrieën op. Uit het karperei ontwikkelt zich een diertje met een relatief grote kop, een nog goedgevulde dooierzak en een lange afgeplatte staart. De stroomlijnvorm die zo karakteristiek is voor een volwassen karper ontbreekt nog geheel. Maar ten gevolge van allerlei allometrieën ontwikkelt zich uit de larve een volwassen individu dat nauwelijks lijkt op zijn larvale stadia. Kortom, een volwassen individu is geen 'opgeblazen' larve. Allometrische groei is regel in de vroege ontwikkeling en isometrie is een uitzondering.
De groei van een lichaam kan worden beschreven als een



figuur 1 Allometrie als aanpassing

macht van het lichaamsgewicht maal een constante. Door logaritmische schalen te nemen verandert de grafiek van een exponentiële groeicurve ($y = a \times b$) in een rechte lijn ($\log y = \log a + b \log x$). Opgroeiende karperlarven vertonen vóór de lengte van 19 mm een groeicoëfficiënt b van 4,47 (allometrische groei), daarna 3,12 (bijna isometrisch).

Dit is nog geen kant-en-klare context voor een wiskunde-examenopgave. Er staat veel te veel informatie in (het artikel zelf is natuurlijk nog veel langer), de informatie is te wetenschappelijk en heeft ook betrekking op andere gebieden dan de wiskunde. De kunst van het vinden van een geschikte context is in eerste instantie het kunnen 'spotten' van zo'n context in een boek, tijdschrift of op internet, en het herkennen van de potentie hiervan.

Versie 0

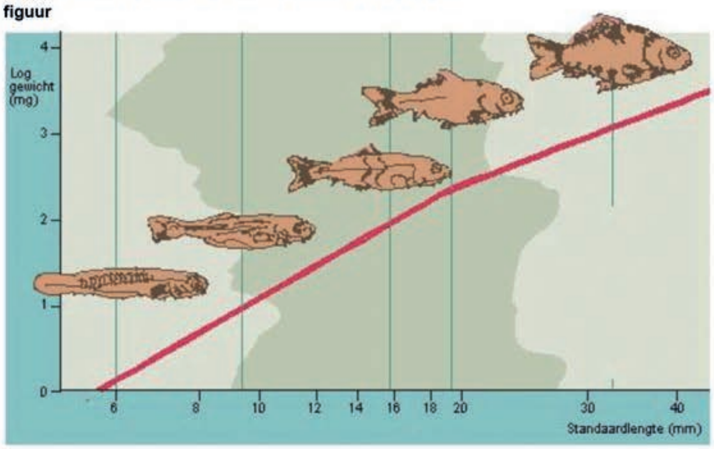
De volgende stap die de constructeur zet, is het halen van zinvolle wiskundige activiteiten voor een examenkandidaat uit deze context. Hiertoe dient de tekst geselecteerd en geherformuleerd te worden. En er moeten vragen geformuleerd worden. Het kost enig speurwerk om de juiste informatie bij elkaar te krijgen die nodig is om vragen te kunnen stellen die op het juiste niveau voor de kandidaat zijn en die bij de syllabus passen. Er moet ook voor gezorgd worden dat die vragen gebaseerd zijn op 'echte' gegevens, passend bij de realistische situatie. Bij dit laatste zou het zo moeten zijn dat de kandidaat met het gestelde probleem in de praktijk geconfronteerd zou kunnen worden. Om de problemen op het niveau van de kandidaat te brengen kan enige bewerking en selectie noodzakelijk zijn. In dit geval leidde dit tot de volgende versie 0 van de opgave *Karpers*, zie figuur 2.

figuur 2 Opgave *Karpers*, versie 0

Groei van een karper **v0**

Tijdens de ontwikkeling van een karper van larve tot volwassen exemplaar zijn twee stadia van groei te onderscheiden. In het eerste stadium verandert de karper(larve) in grote mate van vorm. Dit stadium duurt tot een lengte van ongeveer 19 mm. In het tweede stadium verandert de vorm nauwelijks. Zie de figuur.

figuur



In de figuur staat langs de horizontale as de lengte L in mm tijdens de ontwikkeling. Op deze as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Langs de verticale as staat de logaritme van het gewicht G in mg.

Tijdens de groei van een lichaam is het gewicht evenredig met een macht van de lengte. De groei kan dus beschreven worden met een formule van de vorm

$$G = a \cdot L^b$$

Hierin is b de zogeheten groeicoëfficiënt.

Als een lichaam tijdens de groei niet van vorm verandert, geldt in theorie $b = 3$. In het eerste stadium van de groei van een karper verandert de vorm in grote mate, voor dit stadium geldt $b \approx 4{,}47$.

Uit de figuur volgt dat voor het eerste stadium geldt $a \approx 0{,}00041$.

?p 1 Toon dit met behulp van een berekening aan.

Voor het tweede stadium geldt $a \approx 0{,}022$.

In het tweede stadium verandert de vorm van de karper nauwelijks. De groeifactor zal dus ongeveer gelijk zijn aan 3. Met behulp van de gegevens en vanwege het feit dat de formules voor het eerste en tweede stadium op elkaar aansluiten, is de groeicoëfficiënt voor het tweede stadium te berekenen.

?p 2 Bereken hoeveel procent de groeicoëfficiënt van het tweede stadium afwijkt van de theorie.

De groei in de twee stadia is ook te beschrijven met formules van de vorm $\log(G) = p + q \cdot \log(L)$.

?p 3 Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p en q voor het eerste stadium. Rond daarna je antwoorden af op twee decimalen.

Versie 0 is vaak niet meer dan een half uitgewerkt idee. Deze versie wordt rondgestuurd naar de andere constructeurs. Zij gaan meedenken, in de hoop dat het uiteindelijk een volwaardige opgave oplevert. Een versie 0 heeft nog geen correctievoorschrift. Dat is bij de volgende versie wel verplicht, want om een opgave op waarde te kunnen schatten is het belangrijk om te zien wat er van de kandidaat verwacht wordt, en hoe dat wordt gehonoreerd en beoordeeld. Het traject tot een versie 1 speelt zich buiten het zicht van de toetsdeskundigen van Cito af, dit gaat per mail tussen de constructeurs onderling.

Versie 1

Versie 1 werd door constructeur A als volgt aangekondigd: 'Vandaag heb ik "Groei van een karper" onder het stof vandaan gehaald en hem proberen op te poetsen. Het kostte mij veel moeite om e.e.a. kloppend te krijgen met "de werkelijkheid" en ik gaf het ook al bijna op. Gelukkig vond ik een nieuwe bron waardoor ik het nog aan durf om hem in te sturen. Zelf ben ik nog steeds niet heel tevreden, dus ik verwacht dat jullie er ook het e.e.a. op aan te merken hebben, maar misschien dat iemand anders er bij versie 2 net de juiste draai aan kan geven?! Ik ben m.b.t. deze opgave nu even "leeg".' De nieuwe bron die de constructeur heeft gevonden, is het *Kennisdocument Karper* van Sportvisserij Nederland, waarin staat: 'Klein Breteler & de Laak (2003) hebben met onderstaande formule de lengte-gewichtrelatie bepaald voor karper in Nederland: G = 0,01 · $TL^{3.129}$, waarbij G = gewicht in gram en TL = totaallengte in cm. De relatie is gebaseerd op data van 8.271 vissen met een lengte van 10-94 cm.'[2] Deze gegevens zijn gebruikt in de volgende

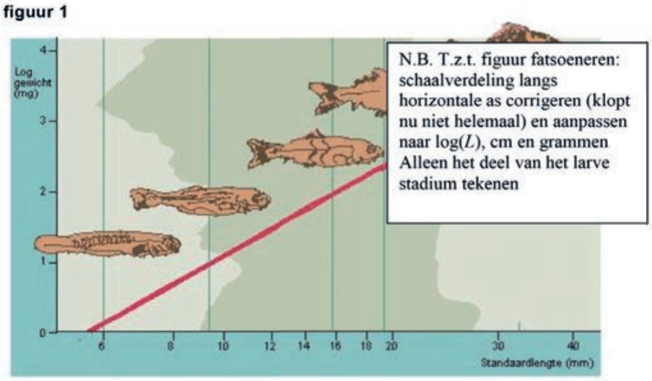
figuur 3 Opgave *Karpers*, versie 1

Groei van een karper v1

Tijdens de ontwikkeling van een karper van larve tot volwassen exemplaar zijn grofweg twee stadia van groei te onderscheiden. In het eerste stadium verandert de karperlarve in grote mate van vorm. Dit stadium duurt tot een lengte van ongeveer 19 mm.

In figuur 1 wordt de groei van een karperlarve weergegeven. Langs de horizontale as staat de logaritme van de lengte L in cm tijdens de ontwikkeling. Langs de verticale as staat de logaritme van het gewicht G in gram. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



4p **1** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage in mg nauwkeurig het gewicht van een karperlarve van 8 mm.

Tijdens beide stadia van de groei van een karper is het gewicht evenredig met een macht van de lengte. De groei kan dus beschreven worden met een formule van de vorm

$G = a \cdot L^b$

Hierin is L weer de lengte in cm, G is weer het gewicht in gram en b is de zogeheten groeicoëfficiënt.

Als een karper tijdens de groei niet van vorm zou veranderen, zou in theorie gelden $b = 3$. In het eerste stadium van de groei van een karper verandert de vorm in grote mate, voor dit stadium geldt $b \approx 4,47$.

Uit de figuur valt ook af te lezen dat een karper(larve) van 1,9 cm ongeveer 0,24 gram weegt.

3p **2** Bereken met behulp van deze gegevens a voor het eerste stadium in drie decimalen nauwkeurig.

Uit onderzoek onder gekweekte karpers tussen 10 en 94 cm in Nederland volgt de formule $G = 0,01 \cdot L^{3,129}$.

3p **3** Bereken hoeveel keer zo zwaar de grootste karper is in vergelijking tot de lichtste karper.

De formule $G = 0,01 \cdot L^{3,129}$ kan herleid worden tot een formule van de vorm $\log(G) = p + q \cdot \log(L)$.

4p **4** Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p en q.

versie 1, zie figuur 3 (op de website is ook de ontwikkeling van het CV te volgen, bij Cito is de leus altijd: het is pas écht een opgave als er een CV bij zit).
Versie 1 wordt besproken in een vergadering van de constructiegroep. Als voorbereiding hierop wordt door de andere constructeurs schriftelijk commentaar gegeven. De toetsdeskundige en de constructeurs gebruiken dit commentaar om de bespreking voor te bereiden. Dit commentaar kan soms behoorlijk stevig zijn. Dat hoort erbij, en daar moet je als constructeur tegen kunnen. Het uitgangspunt is namelijk dat het commentaar nooit persoonlijk bedoeld is, maar dat we met z'n allen proberen een zo goed mogelijke opgave te maken. Het is natuurlijk niet leuk als jouw geesteskindje afgekraakt wordt, maar dat levert vaak wel een betere opgave op. Of er wordt geconcludeerd dat de opgave niet geschikt is. Liever dit laatste, dan een ongeschikte opgave in het examen omdat we elkaar de waarheid niet durven zeggen.

Schriftelijk commentaar

Hieronder het schriftelijke commentaar op deze versie 1:
Constructeur B: 'Het taalgebruik van de inleiding is erg officieel en sluit niet echt aan bij de belevingswereld van onze doelgroep. Liever: fase of deel i.p.v. stadium/stadia. Bijvoorbeeld: in de eerste fase spreken we over een larve. In de tweede fase spreken we over een vis, MAAR: Hier doen we weinig mee, liever weglaten. In stam vraag 2 melden dat de vorm van de jonge vis erg verandert of zo. In grote mate van vorm, klinkt ook erg plechtig en wordt weinig mee gedaan.
Graag herschrijven.
Tweede alinea, tweede zin: tijdens de ontwikkeling, weglaten.
Tekst na vraag 1 herschrijven: stadia en grote mate. Vraag 2 is wel een simpel invuloefeningetje. Hier testen we vooral de leesvaardigheid van de kandidaten. Liever de b uit laten rekenen en de informatie meer structureren, b=3 heb je hier niet nodig!
Vraag 3: grootste t.o.v. kleinste'

Constructeur C: '1e alinea 2e zin 'in grote mate' vervangen door 'sterk' o.i.d.
In de zin na de formule in de opsomming van de betekenis van de letters invoegen 'a is een constante'.
De zin 'Als een karper ...' in de 3e alinea na vraag 1 kan beter weg.
De zin hierna kan dan gewoon worden: 'In het eerste stadium van de groei van een karper geldt $b \approx 4{,}47$.'
Bij vraag 3 toevoegen: 'Rond je antwoord af op honderdtallen.'
Vier onderdelen lijkt me genoeg, dus ik zou niets meer doen met die groeicurve.
Vraag 2 is eenvoudig. Vraag 4 vinden leerlingen altijd lastig. In het geheel een geschikte opgave.'
Constructeur D: 'In de tweede alinea na vraag 1 wordt er b = 3 gegeven. Maar verder niets met die b = 3 gedaan. Verwarrend? Bij opgave 3 bedoel je 'kleinste' ipv 'lichtste'. Verder lijkt mij dit een geschikte opgave. Vrij herkenbaar met wat ze al eens gezien hebben (hersengewicht, bomendiameter, ...).'
Het commentaar varieert dus van kleine tekstuele of wiskundige verbeteringen tot suggesties voor ingrijpende aanpassingen. Ook staan er meningen bij over de vragen. Gelukkig zegt niemand dat deze opgave niet geschikt is.

Vergadering

Dan komt de opgave in de vergadering van de constructiegroep. In deze vergadering worden altijd meerdere opgaven die onder constructie zijn besproken. Ook wordt de stand van zaken van de examens die op dat moment samengesteld worden, doorgenomen.

In de vergadering werden bij de opgave *Karpers* de volgende conclusies getrokken:
De opgave is voldoende afwijkend van de opgave *Mosselen* uit 2011-2.
Constructeur B vindt onderdelen 2 en 3 wat simpel.
Voorstel voor een extra onderdeel: de lengte wordt 2x zo groot, met welke factor verandert het gewicht.
De taal mag wat directer.
Afspraak: constructeur B gaat hiermee aan de slag.

'HET IS NATUURLIJK NIET LEUK ALS JOUW GEESTESKINDJE AFGEKRAAKT WORDT, MAAR DAT LEVERT WEL EEN BETERE OPGAVE OP.'

Verdere traject

Hierna volgen nog vier versies van de opgave, die elk weer besproken worden in een vergadering van de constructiegroep. Het gaat hierbij steeds meer over details in vraagstelling en beoordeling. Deze tussenversies zijn te vinden op de website van de *Euclides.* Uiteindelijk komt de eindversie van de opgave terecht in de opgavenbank.
Een opgave blijft enige tijd in de opgavenbank zitten, totdat deze wordt uitgekozen om voor te leggen aan de vaststellingscommissie wiskunde B van het CvTE. Het voorstel is dan om de opgave op te nemen in de set opgaven die zullen worden uitgeprobeerd.
Elk jaar wordt namelijk een set nieuwe opgaven uitgeprobeerd in toetsen die worden afgenomen bij een aantal leerlingen op scholen in Nederland. Het doel van dit uitproberen is om te onderzoeken of de opgave geschikt is als examenopgave en zo ja, om psychometrische gegevens over de opgave te verzamelen.
Meer informatie over dit proces en het vervolg van de opgave bij de vaststellingscommissie staat in het *Euclides*-artikel van Algra en Limpens.[3]

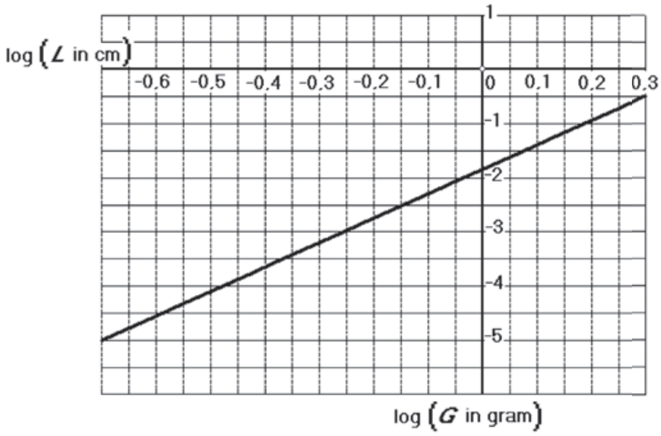
figuur 4 Opgave *Karpers*, zoals in eerste versie aan de vaststellingscommissie is voorgelegd.

Groei van een karper

In het begin van zijn leven ontwikkelt een karper zich van larve tot klein visje. Aan het einde van deze ontwikkeling heeft het visje een lengte van ongeveer 19 mm.

In onderstaande figuur wordt de groei van een karperlarve weergegeven. L is de lengte van de larve in centimeter en G is het gewicht in gram. Langs de horizontale as staat de logaritme van de lengte L en langs de verticale as staat de logaritme van het gewicht G. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



4p 1 Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage in milligrammen nauwkeurig het gewicht van een karperlarve van 8 millimeter.

De groei van een karperlarve kan beschreven worden met een formule van de vorm

$$G = 0{,}014 \cdot L^b$$

Hierin is L de lengte in centimeter, G is het gewicht in grammen en b een constante.

Met behulp van de figuur is te bepalen dat een karperlarve van 1,9 centimeter ongeveer 0,25 gram weegt.

4p 2 Bereken b met behulp van deze gegevens. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Voor een volwassen karper geldt de formule:

$$G = 0{,}014.L^{3{,}129} \text{ met } 10 \leq L \leq 94$$

Hierin is L weer de lengte in centimeter en G is het gewicht in grammen.

3p 3 Bereken hoeveel keer zo zwaar een karper van 94 cm is in vergelijking tot een karper van 10 cm. Rond je antwoord af op honderdtallen.

De formule $G = 0{,}014.L^{3{,}129}$ kan worden herleid tot een formule van de vorm

$$\log(G) = p + q \cdot \log(L).$$

4p 4 Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p en q.

De lezer mag zelf de volgende versie van Karpers, zoals deze was in de eerste versie die aan de vaststellingscommissie is voorgelegd (figuur 4), vergelijken met de opgave zoals deze uiteindelijk in het examen havo wiskunde B van 2016 eerste tijdvak is afgenomen.

Noten

[1] http://www.kennislink.nl/publicaties/de-mens-als-foetale-aap

[2] http://www.sportvisserijnederland.nl/files/kennisdocument-karper_4552.pdf+, p. 34

[3] Algra, A. en G. Limpens (2004). Examenconstructie: een langdurig en zorgvuldig proces. Over de rol van CEVO, Citogroep en docenten bij de totstandkoming van de eindexamens. *Euclides* 80(1), p. 2-5.

vakbladeuclides.nl/921remijn

Over de auteurs

Sjoerd Crans en Jos Remijn zijn toetsdeskundigen van Cito (www.cito.nl). E-mailadressen: *sjoerd.crans@cito.nl*; *jos.remijn@cito.nl*