

NIEUWE STATISTIEK IN HET CENTRAAL EXAMEN HAVO WISKUNDE A

Dit jaar was het eerste landelijke centraal examen havo wiskunde A volgens het nieuwe programma. Vooral naar de vragen bij het nieuw vormgegeven domein statistiek werd door docenten en leerlingen met spanning uitgekeken. De twee pilot-examens uit 2016 waren de enige echte oefenexamens. Jos Remijn, toetsdeskundige bij Cito, beschrijft de ontstaansgeschiedenis van het programma en de ontwikkeling van de statistiekvragen.

Voorgeschiedenis en pilotfase

De invoering van statistiek in het nieuwe programma heeft een opvallende geschiedenis. Tien jaar geleden lanceerde de vernieuwingscommissie cTWO^[1] de eerste versie van het nieuwe programma. Daarin stond over statistiek te lezen: *'Het nieuwe programma beoogt een meer levendige en realistische, probleemgeoriënteerde aanpak van de statistiek in het voortgezet onderwijs. Voor de interpretatie van statistische resultaten zal onveranderd een basis in de kansrekening nodig zijn.'* Na veldraadplegingen verscheen een jaar later het concept-examenprogramma 2013 havo wiskunde A. Het programma havo wiskunde A stond toen niet heel erg in de belangstelling. Over de nieuwe aanpak van statistiek werd wel enige kritiek gehoord: *'te ambitieus'*.^[2]

In 2009 startte een aantal pilotscholen met het vormgeven van het nieuwe programma op basis van de in het voorjaar van 2009 gepubliceerde definitieve cTWO-voorstellen. De aanpak van statistiek werd herzien. De empirische cyclus werd als uitgangspunt gekozen. Voor het analyseren van (grote) databestanden zou gebruik gemaakt moeten worden van ICT. De nieuwe statistiek zou uitsluitend worden getoetst in het schoolexamen. De vertaling van het schetsmatige programma van de nieuwe statistiek naar de werkelijkheid in de klas en de hele ontwikkeling van de ideeën over ICT in de statistiek, kwam in handen van de pilotdocenten in samenwerking met het cTWO-projectteam. Een smalle basis, want er waren slechts vier pilotscholen betrokken. In de pilotfase verscheen lesmateriaal,^[3] ontwikkeld door pilotdocenten en het cTWO-projectteam. Het werken met dit lesmateriaal voor statistiek op de pilotscholen, zorgde voor veel discussie. Er waren problemen met de ICT-ondersteuning. Welke software moest worden gebruikt om te kunnen werken met grote databestanden in de klas? Er werden keuzes gemaakt en soms werden onderdelen niet onderwezen wegens tijdnood op school. Het domein statistiek zat in het schoolexamen, dus het was geen groot probleem als onderdelen werden overgeslagen

of slechts oppervlakkig werden behandeld. De constructiegroep wiskunde A bij Cito was in deze pilotfase niet betrokken bij de ontwikkelingen rondom statistiek, omdat statistiek niet op het centraal examen getoetst werd.

Definitieve nieuwe programma

In januari 2013 verscheen na drie pilotjaren het eindrapport van cTWO^[4] met het definitieve examenprogramma havo wiskunde A. Het programma week af van het pilotprogramma: de nieuwe statistiek werd voor het grootste deel verplaatst naar het centraal examen. En de kansrekening was volledig verdwenen uit het programma. Een belangrijke reden om statistiek in het centraal examen havo wiskunde A op te nemen, was de kritiek uit het veld dat het programma van het centraal examen zonder statistiek wel erg smal was. Verder waren de pilotdocenten bevreesd dat dit nieuwe domein bij de landelijke invoering in het schoolexamendeel wel eens op veel scholen gemarginaliseerd zou kunnen worden. Toch stond in het eindrapport van cTWO dat *'de uitwerking van de leerlijn statistiek in de pilot niet volledig is gelukt.'* Er waren nog veel losse eindjes zoals *'het onderwijs en de toetsing van (elementen van) de onderzoeksproces (opzet en uitvoering van een statistisch onderzoek of van deelstappen voor een dergelijk onderzoek) en de plaats en rol van kansrekening binnen de uitwerking van het vernieuwde domein. Kwantitatief redeneren heeft in de pilot nog te weinig aandacht gekregen.'*

Deze bedenkingen hebben niet geleid tot uitstel van de invoering van het nieuwe programma. De leiding van de resterende pilotfase ging van cTWO over naar SLO. SLO onderschreef de mening van de pilotdocenten dat het pilotmateriaal dat onder leiding van cTWO was ontwikkeld voor de statistiek op de havo, volstrekt ontoereikend was om leerlingen op de nieuwe statistiek in het centraal examen voor te bereiden. Daarom is er door pilotdocenten, in opdracht van SLO, voorbeeldmateriaal geschreven voor statistiek op de havo dat past bij het nieuwe programma.^[5]

Dit heeft geleid tot vier statistiekmodules met bijbehorende uitwerkingen.

Syllabus en voorbeeldexamenopgaven statistiek

De voorlopige syllabus voor het definitieve examenprogramma havo wiskunde A verscheen in juli 2013, nog zonder de bijlage *Voorbeeldexamenopgaven statistiek*. Er stond wel een tiental statistiekopgaven in die door de syllabuscommissie waren gemaakt om de specificaties uit te werken. Deze opgaven waren nog niet van 'examenkwaliteit', wat wil zeggen: niet goedgekeurd door de vaststellingscommissie wiskunde A van CvTE. Maar deze statistiekopgaven maakten wel duidelijk dat de nieuwe aanpak van de statistiek, gebaseerd op de empirische cyclus, een flinke verandering betekende. Tot en met 2008 werd op het havo het vak wiskunde A1,2 geëxamineerd, waarin statistiek nog onderdeel was van het centraal examen. In figuur 1 staan twee vragen uit het centraal examen havo wiskunde A1,2 uit 2008. De nadruk lag toen vooral op het rekenen met gegevens uit statistische diagrammen. In vragen 7 en 8 werden berekeningen met de normale verdeling gevraagd, die met de GR gemakkelijk konden worden uitgevoerd. In vraag 9 werd gevraagd

Ga er in de volgende twee vragen van uit dat de scores voor elke categorie bij benadering normaal verdeeld zijn.

In de Citotoets van 2004 zaten 100 opgaven in de categorie Taal. Kim had er daarvan 73 goed. In figuur 3 staat dat haar **percentielscore** 54 is. Deze percentielscore van 54 betekent dat 54% van alle kinderen 73 opgaven of minder goed had.

Van de Citotoets van 2004 is bekend dat in de categorie Studievaardigheden het aantal goed beantwoorde opgaven gemiddeld 27,6 was met een standaardafwijking van 6,6. Anneke had in deze categorie 21 opgaven goed.

4p 7 Bereken de percentielscore van Anneke.

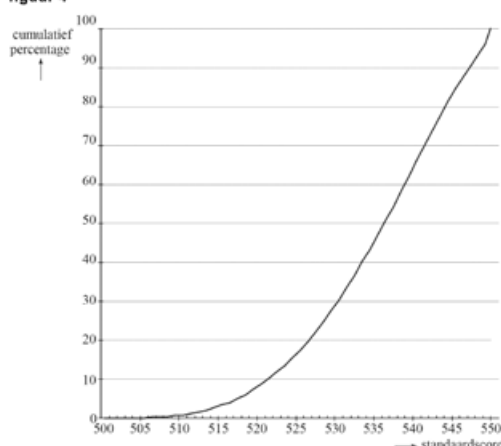
Kim had 48 opgaven goed in de categorie Rekenen-Wiskunde. Dat gaf een percentielscore van 59.

Voor Rekenen-Wiskunde was de standaardafwijking 8,4.

4p 8 Bereken het gemiddelde aantal goed beantwoorde opgaven bij Rekenen-Wiskunde. Rond je antwoord af op een geheel getal.

In figuur 4 zie je de cumulatieve frequentiepolygoon van de standardscore op de Citotoets van 2004. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 4



5p 9 Teken op de uitwerkbijlage met behulp van figuur 4 een boxplot van de standardscores op de Citotoets van 2004. Op de uitwerkbijlage staat al een schaalverdeling voor je boxplot.

figuur 1

een boxplot te tekenen. In het nieuwe programma hoort dit type vragen bij het ICT-deel van het programma, dus in het schoolexamen. Leerlingen moeten daar leren hoe met behulp van ICT een grote dataset geanalyseerd kan worden en hoe daarbij allerlei statistische representaties gemaakt kunnen worden.

Er kwam geen nieuwe piloffase met statistiek in het centraal examen, dus de constructiegroep havo wiskunde A bij Cito moest snel aan de slag. Ook de methodeschrijvers moesten onmiddellijk beginnen met het werk aan de vernieuwde schoolboeken.

De constructiegroep begon met het bestuderen van het cTWO-lesmateriaal en voorbeelden van statistiekopgaven uit buitenlandse examens. Er werden enkele publicaties van de Amerikaanse vereniging van wiskundeleraren^[6] bestudeerd. Bij de ontwikkeling van de eerste versies van examenopgaven statistiek heeft een cTWO-lid en tevens statistiekdeskundige, advies gegeven. In de syllabus staat over de specificaties statistiek in het centraal examen te lezen: *'Zoals uit de formuleringen van de specificaties en uit de voorbeeldvragen bij dit domein blijkt, gaat het steeds om productieve vaardigheden waarbij werkwoorden horen als beoordelen, relevante informatie afleiden, een geschikte representatie kiezen, data karakteriseren, vergelijken en interpreteren. Dit is een gevolg van de samenhang met subdomein E5, dat alleen in het schoolexamen getoetst wordt.'*



figuur 2 Fokke en Sukke voelen dat aan hun water^[7]

De opgaven moesten ook kwalitatieve vragen bevatten; 'bereken'-vragen kunnen met ICT worden aangepakt en dit gebeurt in het schoolexamen. Een uitzondering hierop vormt subdomein E4, waarin onder andere kwantitatieve uitspraken over het verschil tussen twee groepen gedaan moeten worden. Om hier meer lijn in te brengen voor de examenopgaven is door CvTE gekozen voor een lijst met vuistregels. Hierover is advies gevraagd aan meerdere deskundigen.

Dit leidde tot zeer verschillende opinies: moest er wel een dergelijke lijst komen? En er bleken in de beroepspraktijk veel verschillende regels te worden gebruikt. Uiteindelijk heeft overleg met de VvS (Vereniging voor Statistiek^[8]) geleid tot het huidige formuleblad.

De voorbeeldexamenopgaven statistiek waren in de zomer van 2015 gereed. Zij werden samen met het formuleblad met vuistregels en met de formules voor betrouwbaarheidsintervallen gepubliceerd. Dit formuleblad was voor de methodeschrijvers nieuw. De vuistregels moesten nog snel worden meegenomen in de leerboeken voor de vijfde klas. In de correctievoorschriften bij de voorbeeldexamenopgaven statistiek werden regelmatig formuleringen gebruikt als 'Voorbeeld van een juist antwoord' of 'Een juiste uitleg is bijvoorbeeld'. Weliswaar zijn dit soort formuleringen erg gebruikelijk bij de maatschappijvakken,^[9] maar ze zijn erg ongebruikelijk in een examen wiskunde. Echter, meer feedback dan meldingen van enkele fouten in de uitwerkingen kwam er niet. In het voorjaar van 2017, kwamen er enkele kritische geluiden van statistici.

Eerste pilotexamen met statistiek

De pilotscholen stemden toe om één jaar voor de rest van het land het definitieve examenprogramma in te voeren. In 2016 namen zij het eerste examen havo wiskunde A nieuw programma af. Docenten en leerlingen vonden de statistiekvragen in dit examen beslist niet eenvoudig. De gemiddelde p-waarde van de statistiekvragen was 0,33 ($n = 137$). Leerlingen hadden moeite met de formulering van de vragen. Ze moesten gegevens uit verschillende figuren combineren bij de beantwoording van de vragen. Een belangrijk probleem bij de opgave *Links naar Wikipedia-artikelen* was dat ze vaak de variabele (aantal binnenkomende links) en de frequentie (aantal artikelen) niet uit elkaar konden houden. Doordat dit allebei een aantal betrof, haalden veel leerlingen bij de beantwoording van vragen de variabele en de frequentie door elkaar.

Eerste landelijke examen met statistiek

In het examen 2017-1 besloeg de statistiekopgave *Onderzoek naar rekenvaardigheid* drie pagina's. Er waren drie figuren en een tabel in de opgave verwerkt. Voor velen onverwacht: er werd geen vraag over een betrouwbaarheidsinterval gesteld. En, zoals in de syllabus aangekondigd, waren de vragen behoorlijk kwalitatief getint. Bij de correctie was onzekerheid over de vraag hoe moest worden omgegaan met de opmerking 'Voorbeeld van een juist antwoord'. Anders dan bij vragen waarin gerekend of getekend moet worden, is het hier niet altijd meteen duidelijk wat juist en wat onjuist is. In figuur 3 staan de vragen 7 en 8 uit dit examen.

land	gemiddelde score	standaardafwijking	percentiel							
			5	10	25	50	75	90	95	
Australië	267,6	56,6	189,3	197,7	234,7	271,9	305,4	334,3	351,6	
Canada	265,5	55,5	169,2	194,2	230,8	269,8	303,9	332,4	349,3	
Finland	282,2	52,2	193,6	217,4	250,8	285,8	317,3	345,0	360,8	
Frankrijk	254,2	56,2	152,1	179,7	219,9	259,2	293,9	321,5	336,5	
Duitsland	271,7	53,1	179,0	201,9	238,4	275,9	309,3	335,0	350,5	
Italië	247,1	50,0	161,1	182,9	215,4	249,3	281,9	309,1	324,1	
Japan	288,2	44,0	212,6	231,7	260,7	290,8	318,1	341,7	355,4	
Nederland	280,3	51,1	188,6	214,6	251,0	285,8	315,3	339,7	354,2	
Spanje	245,8	51,3	149,1	177,8	216,3	250,3	280,9	307,4	322,3	
Zweden	279,1	54,9	181,7	209,9	249,2	284,0	316,0	342,8	358,4	
USA	252,8	57,0	151,7	177,9	217,1	256,1	293,1	322,7	340,0	
alle deelnemers van de 23 landen	268,7	51,3	178,4	202,8	237,9	272,5	303,9	330,3	345,6	

op 7 Bepaal met behulp van het formuleblad op twee verschillende manieren of het verschil tussen de scores die behaald zijn door de Canadese deelnemers en de scores die behaald zijn door de Spaanse deelnemers groot, middelmatig of gering is.

Er zijn verschillende manieren om met behulp van de tabel de spreiding van de scores tussen landen te vergelijken.

op 8 Kies twee verschillende spreidingsmaten en vergelijk met elk van deze maten de spreiding van de scores in Australië en Spanje.

figuur 3

'HET IS DUIDELIJK DAT DE VRAGEN VEEL KWALITATIEVER GESTELD WORDEN DAN IN DE VROEGERE EXAMENS HAVO WISKUNDE A1,2.'

In vraag 7 werd gevraagd om op twee manieren het verschil tussen de scores van Canada en Spanje te bepalen. In het correctievoorschrift werden twee mogelijke aanpakken gegeven, effectgrootte en boxplots. Al snel werd door docenten ook een mogelijke aanpak met het maximale verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$) gemeld. Eveneens correct, maar wel een flinke klus voor leerlingen die hiervoor kiezen. Er kwamen mooie plaatjes

van cumulatieve frequentiepolygonen op het forum van de NVvW, gemaakt met bijvoorbeeld GeoGebra. De vraag werd niet heel slecht gemaakt, de

p-waarde was 0,48. Anders ging het met vraag 8. Daar werd gevraagd twee verschillende spreidingsmaten te kiezen en daarmee met de gegeven tabel de spreiding in de scores van Australië en Spanje te vergelijken. Maar liefst 65% van de leerlingen behaalde nul punten voor deze vraag. Een score die we niet hadden verwacht, aangezien in de tabel de standaardafwijking van alle landen vermeld stond en met het 75e en 25e percentiel de interkwartielafstand snel berekend kon worden. In gesprekken met docenten werd gesuggereerd dat de leerlingen het woord 'spreiding' kennen, maar het woord 'spreidingsmaten' niet konden thuisbrengen. Het is duidelijk dat de vragen veel kwalitatiever gesteld worden dan in de vroegere examens havo wiskunde A1,2 en dat een vraag als 'Teken het boxplot van Spanje' in de nieuwe aanpak van de statistiek niet meer past in het nieuwe centraal examen.

Conclusie

De aanpak van de statistiek in het nieuwe programma sluit beter aan bij het vervolgonderwijs en bij het gebruik van statistiek in verschillende beroepspraktijken. Het vernieuwde statistiekprogramma leidt tot duidelijk andere vragen over statistiek in het centraal examen. Het is jammer dat er bij de introductie van statistiek in het centraal examen havo wiskunde A geen ruimte is geweest voor een pilotperiode. Mede hierdoor moeten alle betrokkenen nog wennen aan de nieuwe statistiek in het centraal examen havo wiskunde A.

Noten

- [1] cTWO: commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs. De in dit artikel genoemde publicaties van cTWO zijn te vinden op de website <http://www.fisme.science.uu.nl/ctwo/>
- [2] Nijdam, B. (2008). Probleemgeoriënteerde statistiek en kansrekening binnen wiskunde A/C. *Euclides*, 83(4).
- [3] [http://www.fisme.science.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/HAVO Wiskunde A/](http://www.fisme.science.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/HAVO%20Wiskunde%20A/)
- [4] cTWO (2013). *Denken & doen. Wiskunde op havo en vwo per 2015*. cTWO: Utrecht.
- [5] <http://www.betanova.nl/downloads/Lesmateriaal-wiskunde-A-havo>
- [6] Kader, G & Jacobbe, T., & Wilson, P. & Zbiek, R.M. (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- [7] Gepubliceerd met toestemming van Bastiaan Geleijnse namens RGvT
- [8] Website: <http://www.vvs-or.nl/>
- [9] Bijvoorbeeld bij maatschappijleer vwo 2017-1: <http://www2.cito.nl/vo/ex2017/VW-1034-a-17-1-c.pdf>

Over de auteur

Jos Remijn is toetsdeskundige bij Cito.
E-mailadres: jos.remijn@cito.nl