Ivo Claus, Joke Daemen

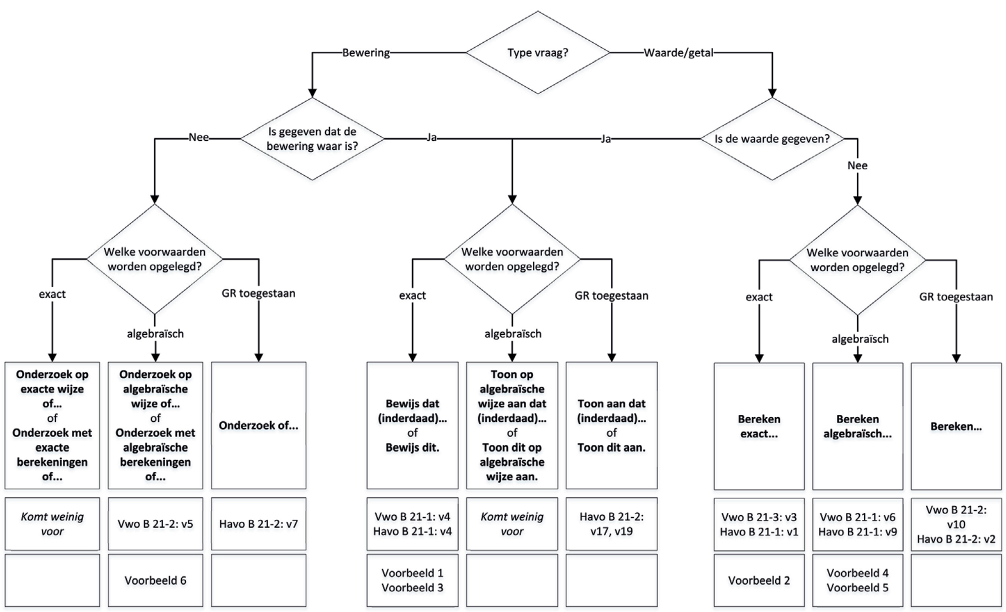
Examenwoorden wiskunde B onder de loep

Bij de examens wordt van de kandidaten verwacht dat zij hun antwoord duidelijk toelichten. Zo moet een redenering of algebraïsche berekening goed te volgen zijn en, als dat van toepassing is, hoe de GR is gebruikt. Cruciaal is dat zowel de examenmakers, correctoren als kandidaten helder hebben wat er van de kandidaten wordt verwacht. In dit artikel kijken we, aan de hand van ervaringen in 2021, nog eens naar enkele veelvoorkomende examenwoorden.

In de periode tussen de afname van een Centraal Examen wiskunde B en de normering hebben docenten de mogelijkheid om via de examenlijn van het CvTE vragen te stellen of de examenmakers op een vermeende fout te wijzen. Daarnaast leggen de examenmakers van Cito en CvTE hun oren te luister op verschillende plekken. Denk hierbij aan de examenbesprekingen, de examenfora van de NVvW en LAKS maar ook aan sociale media. Verder is WOLF (inclusief de quickscan[1]) van Cito, een belangrijke bron voor de evaluatie en normering van het examen. In de examenperiode 2021 viel op dat er bij sommige correctoren onduidelijkheid lijkt te zijn over de betekenis van bepaalde termen uit de examenwoordenlijst van de syllabus.[2] Het gaat dan met name om termen als *algebraïsch*, *exact* en *bewijzen*.
Aan de syllabus van 2014 is een lijst toegevoegd van veel gebruikte examenwoorden met hun betekenis. De examenwerkwoorden kregen daarmee een officiële status. Voor oud-voorzitters van de vaststellingscommissies wiskunde B respectievelijk wiskunde A/C Paul Drijvers en Kenneth Tjon Soei Sjoe was dit aanleiding om het artikel '(Werk)woorden in de centrale examens'[3] te schrijven. Zij bespreken daarin de wijzigingen met de tot dan toe gangbare praktijk en verhelderen aan de hand van enkele voorbeelden de betekenis van de examenwerkwoorden. Ook besteden zij in het artikel aandacht aan de twee zogenaamde begrippenparen, *aantonen* & *bewijzen* en *algebraïsch* & *exact*. Nu, acht jaar later, is het wellicht goed om de beschrijving van destijds nog een keer onder de aandacht te brengen. We leggen dit naast enkele voorbeelden uit de examens wiskunde B van 2021.

Examenvragen gecategoriseerd

Het merendeel van de vragen in de examens wiskunde B van 2021 start met de woorden *bereken exact*, *bereken algebraïsch*, *bereken* of *bewijs*. In de havo-examens komt *bereken* relatief veel vaker voor dan bij vwo. Voor *bewijzen* geldt het omgekeerde; niet geheel onverwacht. Een stuk minder voorkomend zijn formuleringen met bijvoorbeeld *stel op*, *onderzoek* of *toon aan*. De examenmakers gebruiken zulke examenwoorden bedachtzaam. In figuur 1 (niet-uitputtend) is dit in een stroomschema weergegeven. Op enkele



figuur 1 klik op de figuur of ga naar de Euclides-site voor een grote versie

van de keuzes die gemaakt worden, gaan we hieronder verder in. In het stroomschema is de eerste splitsing er een waar niet iedereen zich van bewust is. Sommige examenvragen betreffen een te berekenen *getal/waarde*, andere betreffen een *bewering* die geverifieerd of onderzocht moet worden (of de bewering juist is of niet).
Bij *getal/waarde* kun je denken aan het berekenen van de *x*-coördinaat van een snijpunt of aan het berekenen van de waarde van een parameter. Bij *bewering* kun je denken aan 'Bewijs dat bovenstaande vergelijking juist is' of 'Onderzoek of de *x*-coördinaat van *P* gelijk is aan 3.' Het valt op dat voor deze twee typen er een analoge onderverdeling is voor wat betreft voorwaarden die aan het antwoord gesteld worden, zoals in het stroomschema ook te zien is. De kandidaat moet uit de vraagstelling begrijpen welke voorwaarden dat zijn.

Twee voorwaarden

In grote lijnen kun je zeggen dat er twee voorwaarden zijn: *exacte berekeningen* vereist en *algebraïsche berekeningen* vereist. Als een van deze twee voorwaarden gesteld is, dan mogen de 'specifieke opties van de grafische rekenmachine (GR)' geen onderdeel zijn van de berekening of redenering. Staan *exact* of *algebraïsch* niet in de vraag, dan mogen de specifieke opties van de GR wél gebruikt worden in het antwoord. In tabel 1 is een niet-uitputtend lijstje van voorbeelden gegeven van deze specifieke opties.
Bij vragen die een bewering betreffen, is het onderscheid vergelijkbaar. Als de specifieke opties van de GR niet gebruikt mogen worden, dan begint de vraag met bijvoorbeeld *Bewijs dat...* of *Toon op algebraïsche wijze aan dat...* Als de specifieke opties van de GR wél gebruikt mogen worden, dan begint de vraag met bijvoorbeeld *Toon aan dat...* of *Onderzoek of...*
In het stroomschema zijn de diverse mogelijkheden goed te onderscheiden. Zie ook voorbeeld 1 op pagina 16.
Een enkele keer wordt een 'mengvorm' in een vraagstelling gebruikt. Zoals bijvoorbeeld 'Bereken met behulp van differentiëren de *x*-coördinaat van de top van de grafiek van *f* '. In zo'n geval mag dus de GR worden gebruikt, maar moet er wel gedifferentieerd worden. Het gebruiken van de numeriek benaderde hellingfunctie is dan niet toegestaan. Nadat de functie 'handmatig' door de kandidaat gedifferentieerd is, mag die afgeleide in de GR worden gezet en mag, met behulp van de specifieke opties van de GR, het nulpunt van de afgeleide worden berekend. Terzijde: in de praktijk kunnen we natuurlijk niet zien of de kandidaat, bij een voorwaarde *exact* of *algebraïsch*, de GR heeft gebruikt om het probleem te verkennen of om de berekeningen te controleren. Het gaat er hier dus vooral om welke redeneringen en berekeningen gebruikt mogen worden in het opgeschreven antwoord. Zie ook voorbeeld 2a.

Algebraïsch versus exact

In de examenwoordenlijst is te lezen dat het verschil tussen de termen *algebraïsch* en *exact* gelegen is in het al dan niet mogen opschrijven van *benaderde* (numerieke) tussenantwoorden en het eindantwoord. Benaderingen mogen overigens niet tot een ander eindantwoord leiden dan in het cv is genoemd, zie hiervoor vakspecifieke regel 3 van wiskunde B. Het gebruik van *algebraïsch* dan wel *exact* zegt niets over de uitvoerigheid van de berekening: de stappen die gezet moeten worden bij een *algebraïsche* berekening moeten evengoed worden gezet bij een *exacte* berekening en andersom. Zie voorbeeld 2b.
Wanneer de vraag een bewering betreft, kan er door de examenmakers evengoed een onderscheid gemaakt worden tussen een algebraïsche en een exacte rekenwijze. Als de juistheid van een bewering moet worden aangetoond en er mogen alleen exacte berekeningen plaatsvinden (of redeneringen), dan wordt *bewijs* gebruikt. Mogen de berekeningen algebraïsch, dan zal de formulering *toon op algebraïsche wijze aan* gebruikt worden. Hieraan zie je goed dat *bewijs* eigenlijk hetzelfde betekent als *toon op exacte wijze aan*. Zie ook voorbeeld 3.

specifieke opties van de GR (in examenstand)	opties van de wetenschappelijke rekenmachine [4]

• gebruik van formules/functies
• numeriek benaderde
  ○ snijpunten van twee grafieken
  ○ hellinggrafiek
  ○ oppervlakte onder een grafiek
  ○ extreme waarden
et cetera
	• eenvoudige rekenkundige bewerkingen (zoals optellen en vermenigvuldigen)
	• machtsverheffen (ook met negatieve of gebroken exponenten)
	• logaritme
	• sin, cos, tan
	et cetera

tabel 1

>

Waarom bestaat algebraïsch?

Waarom is er eigenlijk een verschil gemaakt tussen *algebraïsch* en *exact*? Daar zijn verschillende redenen voor:

— Wanneer een vergelijking opgelost moet worden, waarvoor veel stappen gezet moeten worden, dan kan dit resulteren in complexe vormen, zowel in tussenantwoorden als in het eindantwoord. Probeer maar eens exact de vergelijking $3\ln(3x^2 - 8x + 2) - 2 = 0$ op te lossen. Bij zulke vragen zijn we er meer in geïnteresseerd of de kandidaat de juiste oplossingsstappen zet, dan dat hij de uitdijende wiskundige uitdrukkingen blijft beheersen.

— Niet alle vergelijkingen zijn exact oplosbaar, zeker niet binnen het gedefinieerde examenprogramma. Bijvoorbeeld $7\sin(x - 3) + 5 = 8$. Tot aan de stap $\sin(x - 3) = \frac{3}{7}$ kan de berekening exact, maar dan moet de knop $\sin^{-1}$ op de rekenmachine gebruikt worden (wat $x - 3 = 0{,}422\ldots$ geeft). Dat is géén specifieke optie van de GR en dus is dit nog wel een algebraïsche berekening (maar niet exact). Door te vragen deze vergelijking algebraïsch op te lossen, is nog steeds na te gaan of de kandidaat begrijpt welke stappen gezet moeten worden om tot een (zij het afgerond) eindantwoord te komen.

— Exacte berekeningen worden niet vaak gevraagd binnen opgaven in een context, omdat in een toepassing het vaak niet realistisch is om met exacte antwoorden te werken. Meestal mag daar de grafische rekenmachine gebruikt worden en een enkele keer dient er iets algebraïsch berekend te worden. Voorbeeld 4 is niet zozeer een opgave in context, maar toch is daar eenzelfde redenering geldig voor de keuze voor de voorwaarde *algebraïsch*.

— Soms willen we de kandidaten de ruimte bieden voor andere (maar wel algebraïsche) oplosmethoden dan een exacte. Zie voorbeelden 5 en 6.

Merk op dat de voorwaarde *algebraïsch* niet wil zeggen dat de berekening niet *exact* mag. Maar let wel: soms kan het, soms is het een gedoe en soms kan het niet. En: als er een afrondinstructie wordt gegeven, dan zal die exacte waarde aan het eind toch nog even afgerond moeten worden.

Tot slot

Een kandidaat kan niet snel te veel toelichting geven. Het is aan de kandidaten om de corrector aan de hand te nemen bij het beantwoorden van de vraag. Helaas vergeten zij zich geregeld de vraag te stellen 'Heb ik het nu zo opgeschreven dat iedereen begrijpt wat ik bedoel?' Het valt ook niet mee wanneer je als leerling een mooie strategie hebt bedacht om dan nog even los van je enthousiasme aandacht te besteden aan de notatie. Maar het blijft jammer als kandidaten hierdoor niet de waardering krijgen die ze verdienen. Wij hopen met de bespreking van enkele voorbeelden een bijdrage te leveren aan de verheldering van veelvoorkomende examenwoorden en het belang te onderstrepen van een zorgvuldige redenering binnen de wiskunde.

Voorbeeld 1

Vraag 2 uit vwo wiskunde B (2021, 3e tijdvak), zie figuur 2.

Spookje

Op het domein $\left[-\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ worden de functies f en g gegeven door:

$$f(x) = \sin(x)\cos(2x)$$
$$g(x) = 2 + \sin(x)$$

Er geldt: $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$.

Bewijs dat inderdaad geldt: $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$.

figuur 2

Bewezen moet worden dat $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$ de afgeleide is van $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$. Om te voorkomen dat een leerling laat zien dat de plots van Y2 = 6(cos(X))^3 – 5cos(X) en van Y3 = dY1/dX met Y1 = sin(X)cos(2X) mooi over elkaar heen vallen, wordt niet *aantonen* gebruikt, maar *bewijzen*.

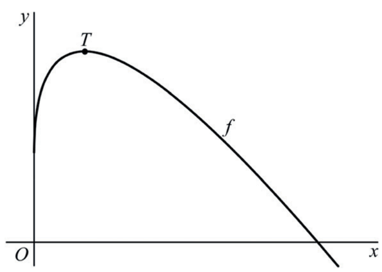
Voorbeeld 2a

Vraag 14 uit havo wiskunde B (2021, 1e tijdvak), zie figuur 3.

Driehoek met maximale oppervlakte

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 1$.
Het punt T is de top van de grafiek van f. Zie figuur 1.

figuur 1



Bereken exact de coördinaten van T.

figuur 3

Gevraagd wordt exact de coördinaten van de top te berekenen van de grafiek van de functie *f*. Hiervoor moet ‘met de hand’ de afgeleide van *f* worden bepaald, waarna de vergelijking $f'(x) = 0$ met algebra moet worden opgelost. Het gebruik van de optie van de GR om maxima/minima te bepalen is hier dus niet toegestaan in de beantwoording van de vraag. De leerling mag ook niet met die optie $x = 0{,}5625$ vinden en die in de wel ‘met de hand’ gevonden afgeleide invullen. Deze waarde moet namelijk stap voor stap worden afgeleid.
In het cv is bij het vierde bolletje te lezen: $x = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{16}$
Bij de examenbespreking merkte een docent op dat hij het vreemd vond dat die laatste stap door de leerling niet met tussenstappen als $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{16}{9}} = \frac{9}{16}$ verklaard moest worden. De reden dat dit niet hoeft: het uitrekenen van een macht, ook al is de exponent negatief, valt niet onder de specifieke opties van de GR. Zulk rekenwerk mag dus gewoon overgelaten worden aan de GR, wanneer een exacte berekening wordt gevraagd; een toelichting is niet nodig. Dit alles wil niet zeggen dat het kennen van een definitie als $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ niet in een examen getoetst kan worden. Dit kan bijvoorbeeld met een vraag waarin de afgeleide van $\frac{1}{x^7}$ nodig is.

Voorbeeld 2b
Vraag 14 uit havo wiskunde B (2021, 1e tijdvak)
Stel dat een leerling bij het vierde bolletje in het cv begint met ‘ $x^{-\frac{1}{2}} = 1{,}33$’ in plaats van $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$, dan heeft hij niet exact gewerkt en dient het scorepunt niet te worden toegekend. Als de leerling aan het eind van het vierde bolletje 0,5625 opschrijft in plaats van $\frac{9}{16}$, dan is dat prima, omdat er dan geen sprake is van afronding. Wellicht vinden we het minder mooi, maar het zijn twee getallen met dezelfde waarde. Vanuit de natuurkunde kijk je op een verschillende manier tegen deze twee getallen aan, maar omdat significantie geen onderdeel is van het examenprogramma wiskunde B, mogen kandidaten dit als gelijke getallen hanteren.

Voorbeeld 3
Vraag 11 uit vwo wiskunde B (2021, 1e tijdvak), zie figuur 4.
We kennen waarschijnlijk allemaal de ervaring dat een wiskundig bewijs moeilijker blijkt dan het in eerste oogopslag lijkt. De zinsnede ‘hieruit volgt eenvoudig...’ kost urenlange hoofdbrekens, waarmee het probleem wordt verschoven van de auteur naar de lezer. Echter, wanneer een kandidaat in het examen een bewijs moet geven, is het van belang dat de kandidaat de beoordelaar overtuigt van de bewering die bewezen moet worden. Dat betekent dat de leerling nauwgezet laat zien en dat hij de afzonderlijke stappen in de bewijsvoering begrijpt en verwoordt en daarmee dus niets aan de lezer/beoordelaar overlaat.

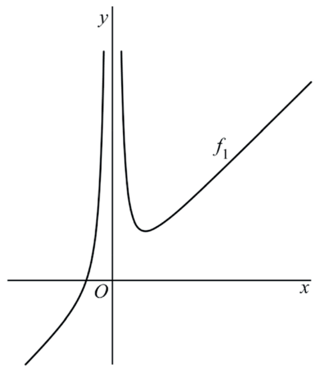
Gebroken functie met een parameter

Voor $p > 0$ wordt de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{x^3 + 4p}{x^2}$$

In de figuur is de grafiek van f_1 weergegeven.

figuur



De grafiek van f_1 heeft een scheve asymptoot.
Bewijs dat de grafiek van f_1 boven deze scheve asymptoot ligt.

figuur 4

11
maximumscore 3

- $f_1(x) = x + \frac{4}{x^2}$ 1
- (Als x onbegrensd toeneemt, nadert $\frac{4}{x^2}$ tot 0, dus) de vergelijking van de scheve asymptoot is $y = x$ 1
- Omdat ($4 > 0$ en) $x^2 > 0$, geldt $x + \frac{4}{x^2} > x$ (dus ligt de grafiek van f_1 boven de scheve asymptoot) 1

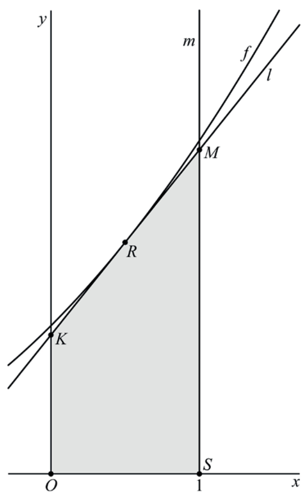
figuur 5

Redeneringen (onderdeel van de syllabus) in een centraal examen zijn een uitdaging voor de examenmakers. Was het een mondelinge toets, dan kon je de kandidaat altijd verdere ‘waarom’-vragen stellen: het is voor de kandidaat immers moeilijk te bedenken wanneer een bewijs ‘diep’ genoeg is. Dat het een landelijke (en *high stakes*) toets is, maakt dat we voor het correctievoorschrift, zie figuur 5, >

goed nadenken en bediscussiëren wat de minimale eis is die wij aan alle kandidaten in het land stellen. Zo wordt in dit voorbeeld wél geëist dat de kandidaat benoemt dat $x^2 > 0$ en $x+\dfrac{4}{x^2}>x$, maar er hoeft niet te worden vermeld dat 4 een positief getal is. Ergens moet een grens worden getrokken. Correctoren weten hiermee waar zij aan toe zijn, en de verschillen tussen de beoordelingen van de correctoren in het land, bij dezelfde antwoorden, zijn hierdoor kleiner.

Voorbeeld 4
Vraag 9 uit havo wiskunde B (2021, 1e tijdvak), zie figuur 6.

figuur 3



Een vergelijking van l is $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$.
De oppervlakte van de grijs gemaakte vierhoek $OSMK$ in figuur 3 wijkt een beetje af van de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 1.

figuur 6

Het eindantwoord $\frac{100}{76}$ (%) geeft de afwijking die we zoeken niet zo helder weer, 1,3% doet dat wel. Vervolgens heeft het weinig zin te eisen dat tussenantwoorden niet afgerond mogen worden. Daarom is er bij deze vraag bewust voor gekozen de afwijking in de oppervlakten algebraïsch te laten berekenen.

Voorbeeld 5
Vraag 6 uit vwo wiskunde B (2021, eerste tijdvak), zie figuur 7.

Bereken algebraïsch de coördinaten van de twee mogelijke plaatsen van het epicentrum in kilometers. Geef de coördinaten in je eindantwoord als gehele getallen.

figuur 7

6 maximumscore 6

- Voor de coördinaten van het epicentrum geldt $x^2 + y^2 = 240^2$ en $(x-192)^2 + (y-128)^2 = 80^2$ — 1
- Uit het verschil van beide vergelijkingen volgt $384x - 192^2 + 256y - 128^2 = 240^2 - 80^2$ — 1
- Herleiden tot $y = -1{,}5x + 408$ — 1
- Invullen (bijvoorbeeld in de vergelijking van de cirkel om S) en herleiden geeft $3{,}25x^2 - 1224x + 108\,864 = 0$ — 1
- De oplossingen van deze vergelijking zijn $x = 144$ en $x = 232{,}6...$ — 1
- De gevraagde coördinaten zijn $(144, 192)$ en $(233, 59)$ — 1

of

- $ST = \sqrt{192^2 + 128^2} = 230{,}75...$ — 1
- Voor de hellingshoek α van ST geldt $\tan(\alpha) = \frac{128}{192}$, waaruit volgt $\alpha = 33{,}69...(°)$ — 1
- Toepassen van de cosinusregel in driehoek STE (met E de plaats van het epicentrum) geeft $80^2 = 240^2 + 230{,}75...^2 - 2 \cdot 240 \cdot 230{,}75... \cdot \cos(\angle EST)$ — 1
- Algebraïsch oplossen geeft $\angle EST = 19{,}44...(°)$ — 1
- De hellingshoek van SE is dus gelijk aan $33{,}69... + 19{,}44... = 53{,}13...(°)$ of gelijk aan $33{,}69... - 19{,}44... = 14{,}25...(°)$ — 1
- Dit geeft voor E $(240 \cdot \cos(53{,}13...), 240 \cdot \sin(53{,}13...))$ en $(240 \cdot \cos(14{,}25...), 240 \cdot \sin(14{,}25...))$, dus de gevraagde coördinaten zijn $(144, 192)$ en $(233, 59)$ — 1

figuur 8

Het eerste alternatief van het cv, zie figuur 8, is zeker niet volledig exact, maar wel bijna: in het vijfde antwoord-element wordt niet meer exact gerekend, maar dat had wel eenvoudig gekund door wortelvormen te gebruiken die uit de *abc*-formule volgen. Aan het tweede alternatief is te zien dat er ook een heel andere benadering is, waarbij de kandidaat ook goed laat zien hoe meetkundige problemen opgelost kunnen worden. Dit was een extra reden om deze vraag niet exact te stellen. Dit laatste voorbeeld laat overigens meteen zien dat er *niet* een regel is als 'wanneer de vraag exact opgelost kan worden, dan stellen we de vraag ook exact'.

Voorbeeld 6
Vraag 5 uit vwo wiskunde B (2021, tweede tijdvak), zie figuur 9

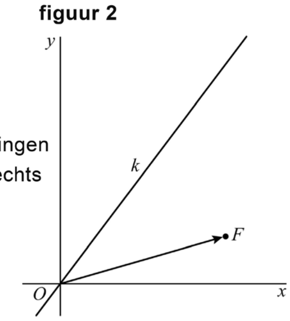
Gegeven is punt $F(7, 2)$ en vector $\overrightarrow{OF}$.
Ook is gegeven de lijn k met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Zie figuur 2.

Vector $\overrightarrow{OF}$ wordt gespiegeld in lijn k.

Onderzoek met algebraïsche berekeningen of het spiegelbeeld van $\overrightarrow{OF}$ links of rechts van de y-as ligt.

figuur 2



figuur 9

In het correctievoorschrift is aan de eerste twee antwoord-alternatieven te zien dat deze vraag op exacte wijze beantwoord kan worden. De laatste drie antwoord-alternatieven zijn algebraïsch van aard, er zijn afgeronde (decimale) tussenantwoorden. Door de vraag algebraïsch te stellen, bieden we de kandidaten meer oplossings-strategieën. Merk op dat het in deze vraag goed past: wanneer je wilt weten of het spiegelbeeld van $\overrightarrow{OF}$ links of rechts van de y-as ligt, dan geven de benaderingen zoals die in de antwoordalternatieven te zien zijn, daarover al voldoende duidelijkheid.

Het schema van figuur 1 is te downloaden van de site.
vakbladeuclides.nl/975examenwoorden

Noten

[1] *https://www2.cito.nl/vo/examenverslag/waardering2021/pdf/21115.pdf*

[2] Syllabus 2022 wiskunde B havo en syllabus 2022 wiskunde B vwo, College voor Toetsen en Examens vwo, havo, vmbo, Utrecht.

[3] Paul Drijvers en Kenneth Tjon Soei Sjoe, '(Werk) woorden in de centrale examens', *Euclides* 92-7.

[4] Hiermee bedoelen we een rekenmachine met basisbewerkingen, zoals omschreven in bijvoorbeeld paragraaf 3.2.2. van bijlage 1B van het document 'Hulpmiddelen Havo en Vwo 2022', zie *https://www.examenblad.nl/hulpmiddel/toegestane-hulpmiddelen-vwo-havo-13/2022/f=/bijlage_1b_bij_cvte-21.00581_wijzigingsregeling_hulpmiddelen_ce_vo_2022_vs_def.pdf*

Over de auteurs

Ivo Claus is toetsdeskundige wiskunde bij Cito.
E-mailadres: *Ivo.Claus@cito.nl*
Joke Daemen is universitair docent bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en voorzitter van de vaststellingscommissie wiskunde B (h/v) van het CvTE.
E-mailadres: *J.W.M.J.Daemen@uu.nl*

Wiskunde in teams

WiTje: Krassen in december

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op A-lympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Op een december-kraslot is het de bedoeling dat je elke dag in december een vakje openkrast, en dan verschijnt er een symbool. Er zijn negen verschillende symbolen. Aan het eind van december heb je 31 vakjes opengekrast en misschien wel een prijs gewonnen. Of zelfs meer prijzen! Als je, bijvoorbeeld, uiteindelijk drie kerstmannen hebt gekrast, win je € 3,00. De verdere verdeling van de prijzen zie je in figuur 1.

Aantal symbolen	Prijs
3 ×	€ 3
4 ×	€ 5
5 ×	€ 10
6 ×	€ 20
7 ×	€ 50
8 ×	€ 100
9 ×	€ 200
10 ×	€ 5 000
11 ×	€ 100 000

figuur 1 de negen symbolen met de bijbehorende prijs

Het is nooit zo dat er meer symbolen op de kaart staan dan nodig is om een prijs te winnen. Zo komt bijvoorbeeld een kraslot met vier (of meer) kerstmannen niet voor!

1 Geef een voorbeeld van een kraslot waarop geen enkele prijs valt en die wel alle negen verschillende symbolen bevat.
2 Onderzoek wat het maximale bedrag is dat je met één enkel kraslot zou kunnen winnen.
3 Onderzoek of het mogelijk is dat alle twee miljoen exemplaren van de kasloten verschillend zijn.

Bron: A-lympiade voorronde 2011, zie *https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28690/*